ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητοί συνάδελφοι,
Φίλοι μαθητές και μαθήτριες

Η καινούργια μας σειρά βιβλίων με τον τίτλο "**ΒΙΒΛΙΟμαθήματα**" δημιουργήθηκε από μια ιδέα μας για το περιοδικό "**Εξετάσεις**" της Ελευθεροτυπίας. Παρουσιάσαμε στην εφημερίδα τα μαθήματα, όπως γίνονται στον πίνακα, δημιουργώντας για το σκοπό αυτό την πολυπληθέστερη συγγραφική ομάδα που έχει ποτέ συσταθεί, προσπαθώντας την εμπειρία της τάξης να την αποτυπώσουμε στο χαρτί. Τη συγγραφική ομάδα αποτελούν καθηγητές συγγραφείς καταξιωμένοι στη συνείδηση γονιών και μαθητών για την ποιότητα της δουλειάς τους.

Η συλλογική αυτή προσπάθεια, εμπλουτισμένη, σε σχέση με το υλικό που παρουσιάστηκε στην εφημερίδα, απευθύνεται, αφενός στον καθηγητή που θέλει να παρουσιάσει το μάθημά του στην τάξη με μια μεθοδικότητα, αφετέρου στο φιλόπονο μαθητή που θέλει να διαβάσει, να μελετήσει και να κατανοήσει την ύλη, χωρίς να σπαταλήσει τον πολύτιμο χρόνο του.
Γι' αυτό κάθε μάθημα ολοκληρώνεται σ'έναν τόμο. Στο βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιέχονται μια σειρά από νέες, στην Ελληνική βιβλιογραφία, ασκήσεις καθώς και συνδυαστικά θέματα.

Ο σκοπός μας: να δημιουργήσουμε ένα "**εργαλείο δουλειάς**" για όλους μας.

Η ύλη χωρίστηκε σε **12 ΒΙΒΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

- Τις απαραίτητες γνώσεις θεωρίας, με παρατηρήσεις για βαθύτερη κατανόηση.
- Λυμένα παραδείγματα, στα οποία καταδεικνύεται η μεθοδολογία επίλυσής τους σε **κίτρινο πλαίσιο**.
- Λυμένες ασκήσεις.
- Τα προτεινόμενα θέματα με υποδείξεις - απαντήσεις σε **μπλέ πλαίσιο**.
- Το "**ξεχωριστό θέμα**".

Όσοι από τους συναδέλφους επιθυμούν να έχουν τις λύσεις των ασκήσεων, για έλεγχο των απαντήσεων, με χαρά θα τις στείλουμε αν επικοινωνήσουν μαζί μας. Επίσης, θα θέλαμε κρίσεις, παρατηρήσεις, καθώς και επισημάνσεις γι' αυτή μας την προσπάθεια, ώστε η γόνιμη αυτή ανταλλαγή απόψεων να βοηθήσει στη βελτίωση των μελλοντικών μας εκδόσεων.

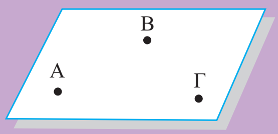
Η συγγραφική ομάδα

Περιεχόμενα

Ομοιότητες
Μέτρηση κύκλου
Μετρικές σχέσεις σε κύκλο
Γεωμετρία
Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα
Κανονικά πολύγωνα
Αναλογίες
Εμβαδά επιπέδων σχημάτων

1ο μάθημα

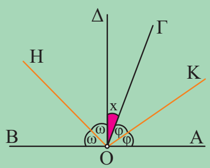
Βασικά γεωμετρικά σχήματα

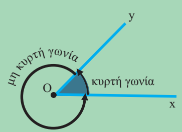


2ο Κεφάλαιο

2ο μάθημα

Η γωνία - Ο κύκλος



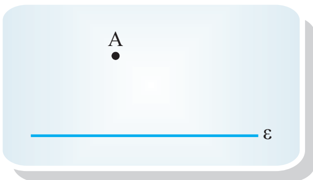


Μάθημα 1 Βασικά γεωμετρικά σχήματα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες

Τις έννοιες: **σημείο, ευθεία** και **επίπεδο** τις δεχόμαστε ως αρχικές.

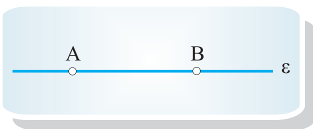


- Το **σημείο** δεν έχει διαστάσεις. Παριστάνεται με μια τελεία και συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα (π.χ Σημείο Α (βλ.σχήμα)).
- Η **ευθεία** είναι μια γραμμή που χαράζεται με τη βοήθεια του κανόνα.
  Συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα, π.χ. ε ή με τα γράμματα δυο σημείων της π.χ. ΓΔ (βλ.σχήμα).
- Το **επίπεδο** είναι μια λεία επίπεδη επιφάνεια, όπως για παράδειγμα η επιφάνεια ενός τραπεζιού.



Για να αναζητήσουμε και να ερμηνεύσουμε τις σχέσεις και τις ιδιότητες των στοιχείων αυτών,**δεχόμαστε ορισμένες αλήθειες,που τις ονομάζουμε αξιώματα.**

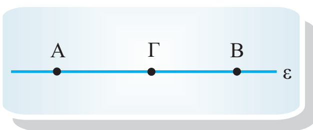
Αξίωμα 1.
Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
Με το αξίωμα 1 αποδεικνύουμε τα παρακάτω θεωρήματα:



Θεώρημα 1
Δυο ευθείες που έχουν δύο τουλάχιστον κοινά σημεία συμπίπτουν.

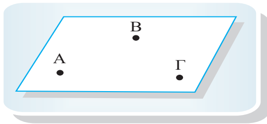
Άρα δύο διαφορετικές ευθείες μπορεί να έχουν:
- μοναδικό κοινό σημείο οπότε λέμε ότι **τέμνονται.**
- κανένα κοινό σημείο οπότε λέμε ότι είναι **παράλληλες.**

Θεώρημα 2
Αν τρία σημεία ανήκουν στην ίδια ευθεία,τότε το καθένα ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο.



Αξίωμα 2.

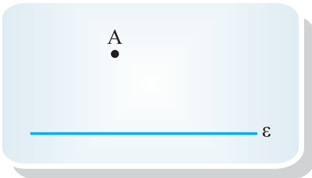
Κάθε επίπεδο περιέχει τρία τουλάχιστον σημεία μη συνευθειακά. Απο τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μόνο επίπεδο.



Με το αξίωμα 2 αποδεικνύουμε τα παρακάτω θεωρήματα:

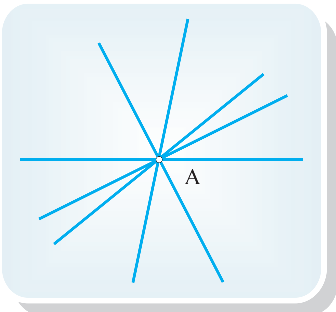
Θεώρημα 3

Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε μια δοσμένη ευθεία.



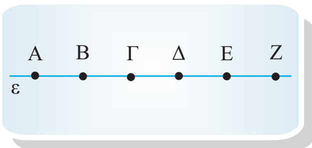
Θεώρημα 4

Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.



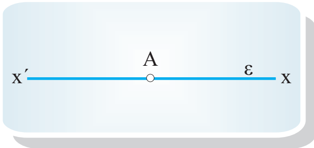
Αξίωμα 3.

Μια ευθεία έχει άπειρα σημεία. (εκτείνεται απεριόριστα προς τις δύο κατευθύνσεις)



Η ημιευθεία

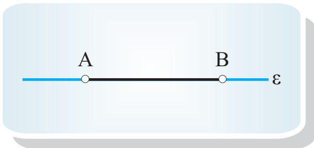
Έστω ευθεία ε και Α ένα τυχαίο σημείο της. Το σημείο Α χωρίζει την ευθεία σε δύο τμήματα που συμβολίζονται με Αx και Αx΄και λέγονται ***ημιευθείες*** με αρχή το σημείο Α.



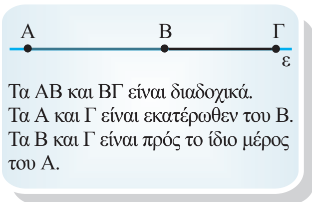
Η ευθεία ε λέγεται ***φορέας*** της ημιευθείας Αx. Δύο ημιευθείες με μοναδικό κοινό σημείο την αρχή και κοινό φορέα ονομάζονται ***αντικείμενες*** ημιευθείες.

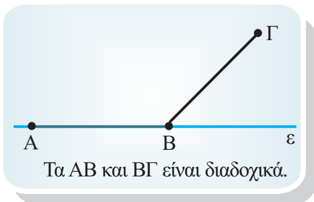
Το ευθύγραμμο τμήμα

Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ονομάζεται το τμήμα μιας ευθείας ε που ορίζεται από δύο σημεία της Α,Β που ονομάζονται άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ενώ η ευθεία ε ονομάζεται φορέας του τμήματος.



Δύο ευθύγραμμα τμήματα με μοναδικό κοινό σημείο το ένα άκρο τους λέγονται ***διαδοχικά***.



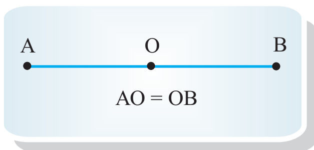


Μετατοπίσεις στο επίπεδο

Το σχήμα που προκύπτει από τη μετατόπιση ενός σχήματος από την αρχική του θέση σε κάποια άλλη θέση έτσι ώστε το σχήμα να παραμένει αναλοίωτο ως προς τη μορφή και το μέγεθος ,ονομάζεται **ομόλογο** (ή **εικόνα**) του αρχικού.

Σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων

Δύο ευθύγραμμα τμήματα ονομάζονται ***ίσα*** όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.
Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι ένα μοναδικό σημείο Ο μεταξύ των Α και Β τέτοιο ώστε ΑΟ = ΟΒ.

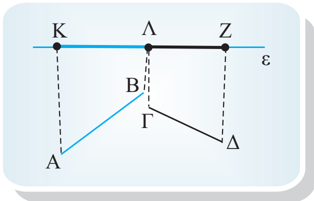


Δύο σημεία Α και Β λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο Ο, αν το Ο είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ δηλαδή ΑΟ = ΟΒ.

Πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων

Α) Πρόσθεση ευθυγράμμων τμημάτων.

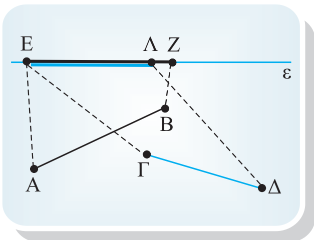
Για να προσθέσουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα, με τη βοήθεια του διαβήτη τα μετατοπίζουμε πάνω στην ίδια ευθεία ώστε να είναι διαδοχικά.
Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα το ΑΒ μετατοπίζεται στο ΚΛ, το ΓΔ μετατοπίζεται στο ΛΖ.



Τότε ΑΒ + ΓΔ = ΚΖ. Το τμήμα ΚΖ λέγεται ***άθροισμα*** των ΑΒ και ΓΔ.

Β) Αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων.

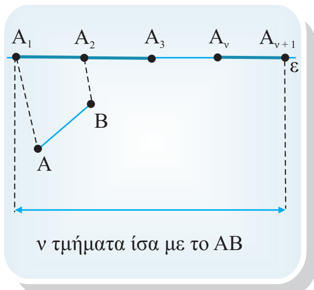
Για να αφαιρέσουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα, τα μετατοπίζουμε κατάλληλα, με τη βοήθεια του διαβήτη, ώστε να βρίσκονται στην ίδια ευθεία και να έχουν κοινό άκρο και κοινά εσωτερικά σημεία.
Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα το ΑΒ μετατοπίζεται στο ΕΖ, το ΓΔ μετατοπίζεται στο ΕΛ.



Τότε ΑΒ - ΓΔ = ΛΖ. Το τμήμα ΛΖ λέγεται ***διαφορά*** των ΑΒ και ΓΔ.

Γ) Γινόμενο φυσικού αριθμού με ευθύγραμμο τμήμα.

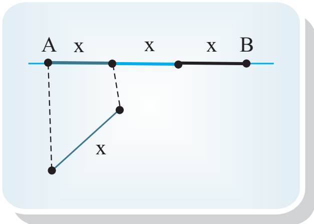
Για να πολλαπλασιάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με φυσικό αριθμό ν, μετατοπίζουμε ν φορές το ευθύγραμμο τμήμα στην ίδια ευθεία.
Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα το ΑΒ μετατοπίζεται διαδοχικά στα ευθύγραμμα τμήματα $Α_1Α_2$, $Α_2Α_3$, $Α_3Α_4$,…., $Α_νΑ_{ν+1}$.



Τα ν διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζουν το ευθύγραμμο τμήμα $Α_1Α_{ν+1}$,που είναι ίσο με $ν \cdot ΑΒ$.

Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι ένας θετικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές μεγαλύτερο ή μικρότερο είναι το ΑΒ από ένα ευθύγραμμο τμήμα που θεωρούμε ότι έχει μήκος τη μονάδα.
Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται και ***απόσταση*** των σημείων Α και Β.
Για παράδειγμα στο επόμενο σχήμα είναι ΑΒ = 3x δηλαδή ΑΒ = 3.



Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μέθοδος 1

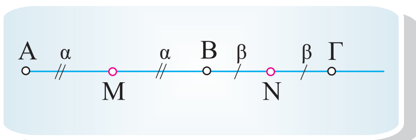
1. Όταν δίνεται το μέσο Μ ενός ευθύγραμμου τμήματος, έστω ΑΒ, να έχουμε πάντα υπόψη ότι $AM = MB = \frac{AB}{2}$.

Μέθοδος 2

2. Για να αποδείξουμε μια σχέση ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων.
- Ξεκινάμε από το μέλος που μπορούν να γίνουν πράξεις.
- Προσπαθούμε με κατάλληλες προσθαφαιρέσεις να εκφράσουμε τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουμε συναρτήσει των τμημάτων του άλλου μέλους της ισότητας.
- Συνήθως συμβολίζουμε με τα ίδια γράμματα τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1
Έστω τα διαδοχικά και συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Δείξτε ότι $MN = \frac{A\Gamma}{2}$.



Λύση

1ος τρόπος

Έχουμε Μ μέσο του ΑΒ ,οπότε $AM = MB = \frac{AB}{2}$.

Ομοίως Ν μέσο του ΒΓ, οπότε $BN = N\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $MB + BN \overset{(1),(2)}{=} \frac{AB}{2} + \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AB + B\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$.

2ος τρόπος

Αν ονομάσουμε $AM = MB = \alpha$ και $BN = N\Gamma = \beta$ τότε: $MN = \alpha + \beta = \frac{2(\alpha + \beta)}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$

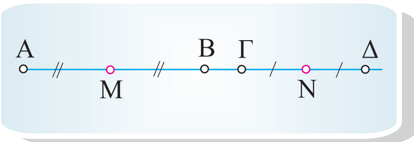
Άσκηση 2

Έστω τα διαδοχικά και συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Δείξτε ότι i. $MN = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$ ii. $A\Gamma + B\Delta = A\Delta + B\Gamma$

Λύση

i.

1ος τρόπος

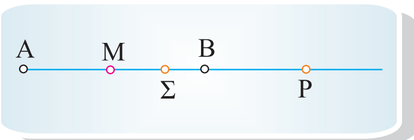


Έχουμε Μ μέσο του ΑΒ,οπότε $AM = MB = \frac{AB}{2}$.

Επειδή Ν μέσο του ΓΔ ,είναι $\Gamma N = N\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα $\frac{A\Delta + B\Gamma}{2} = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} + \frac{2B\Gamma}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} = MB + B\Gamma + \Gamma N = MN$

2ος τρόπος



i. Αν ονομάσουμε ΑΜ = x = ΜΒ και ΓΝ = y = ΝΒ, τότε:

$$\frac{ΑΔ+ΒΓ}{2}=\frac{2x+ΒΓ+2y+ΒΓ}{2}=x+ΒΓ+y=ΜΝ$$

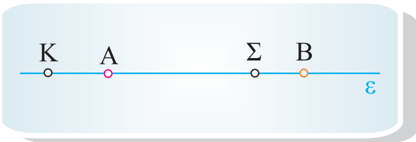
ii. ΑΓ + ΒΔ = 2x + ΒΓ + ΒΓ + 2y = 2x + ΒΓ + 2y + ΒΓ = ΑΔ + ΒΓ.

Άσκηση 3

Σε ευθεία ε θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το μέσο Μ, ένα τυχαίο σημείο Σ μεταξύ των Μ και Β, και Ρ ένα τυχαίο εξωτερικό σημείο του ΑΒ. Δείξτε ότι:

i. $ΣΜ=\frac{ΣΑ-ΣΒ}{2}$ **και ii.** $ΡΜ=\frac{ΡΑ+ΡΒ}{2}$.

Λύση



Έχουμε Μ μέσο του ΑΒ ,οπότε $ΑΜ=ΜΒ=\frac{ΑΒ}{2}$ (1).

i. $\frac{ΣΑ-ΣΒ}{2}=\frac{ΣΜ+ΜΑ-(ΜΒ-ΣΜ)}{2}=\frac{ΣΜ+ΜΑ-ΜΒ+ΣΜ}{2}=$

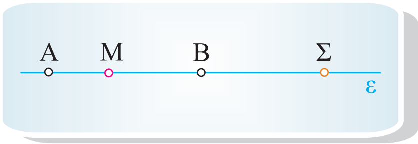
$=\frac{2ΣΜ+ΜΒ-ΜΒ}{2}=ΣΜ$.

ii. $\frac{ΡΑ+ΡΒ}{2}=\frac{ΡΜ+ΜΑ+ΡΜ-ΜΒ}{2}\overset{(1)}{=}\frac{2ΡΜ+ΜΒ-ΜΒ}{2}=ΡΜ$.

Άσκηση 4

Στην ευθεία ε παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Σ και Κ. Το σημείο Σ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ ώστε $ΣΒ=\frac{3}{4}ΣΑ$. Το σημείο Κ είναι εξωτερικό του τμήματος ΑΒ προς το μέρος του Α. Να δειχθεί ότι: $ΚΣ=\frac{3\cdot ΚΑ+4\cdot ΚΒ}{7}$.

Λύση



Είναι $K\Sigma = KA + A\Sigma \Leftrightarrow 3 \cdot K\Sigma = 3 \cdot KA + 3 \cdot A\Sigma$ και

$$K\Sigma = KB - \Sigma B \Leftrightarrow 4 \cdot K\Sigma = 4 \cdot KB - 4 \cdot \Sigma B = 4 \cdot KB - 4 \cdot \frac{3}{4}\Sigma A = 4KB - 3\Sigma A$$

Άρα είναι $7K\Sigma = 3 \cdot KA + 4 \cdot KB \Leftrightarrow K\Sigma = \dfrac{3 \cdot KA + 4 \cdot KB}{7}$

Άσκηση 5

Σε ευθεία ε δίνονται στη σειρά τα σημεία Α, Ρ, Β, Σ ώστε $PA = \kappa \cdot PB$ και $\Sigma A = \kappa \cdot \Sigma B$, όπου κ θετικός. Να δειχθεί ότι: $\dfrac{2}{(AB)} = \dfrac{1}{(AP)} + \dfrac{1}{(A\Sigma)}$.

Λύση

Θέλουμε να δείξουμε ότι: $\dfrac{2}{(AB)} = \dfrac{1}{(AP)} + \dfrac{1}{A\Sigma}$.

Αρκεί να δείξουμε: $\dfrac{(AB)}{(AP)} + \dfrac{(AB)}{(A\Sigma)} = 2$.

$$\frac{(AB)}{(AP)} + \frac{(AB)}{(A\Sigma)} = \frac{(AP + PB)}{AP} + \frac{(A\Sigma - \Sigma B)}{(A\Sigma)} = \frac{(\kappa PB + PB)}{(\kappa PB)} + \frac{(\kappa \Sigma B - \Sigma B)}{(\kappa \Sigma B)} =$$

$$\frac{(\kappa + 1)(PB)}{\kappa(PB)} + \frac{(\kappa - 1)(\Sigma B)}{\kappa(\Sigma B)} = \frac{\kappa + 1}{\kappa} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} = 2$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ με μέσο το Μ, ΑΓ με μέσο το Θ και $AB < A\Gamma$. Δείξτε ότι το σημείο Θ βρίσκεται

i. μεταξύ των Μ και Β, αν $A\Gamma < 2AB$ και

ii. μεταξύ των Β και Γ, αν $A\Gamma > 2AB$.

2. Έστω τα διαδοχικά και συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Γ μέσο του ΒΔ. Δείξτε ότι 2ΑΓ > ΑΔ.

3. Έστω τα διαδοχικά και συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν ισχύει $ΒΓ = \frac{ΜΝ}{2}$, δείξτε ότι ΑΔ = ΜΓ + ΒΝ.

4. Δίνεται τμήμα ΑΒ ευθείας ε και ένα εσωτερικό σημείο Μ, τέτοιο ώστε $ΜΑ = \frac{5}{3}ΜΒ$. Αν Σ είναι σημείο στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, τέτοιο ώστε $ΣΑ = \frac{5}{3}ΣΒ$, αποδείξτε ότι: $\frac{1}{(ΑΒ)} = \frac{1}{(ΑΜ)} + \frac{1}{(ΑΣ)}$.

5. Έστω τα διαδοχικά και συνευθειακά σημεία Α,Β,Γ,Δ τέτοια ώστε ΒΓ = 2ΑΒ και ΓΔ = 3ΑΒ. Αν Μ,Ν,Θ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα και Ν΄ είναι το συμμετρικό του Ν με κέντρο το Γ να δείξετε ότι ΑΜ = ΘΝ΄.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Αν α, β, γ είναι τρία ευθύγραμμα τμήματα τέτοια ώστε α > β > γ να δειχθεί ότι:

$$\gamma < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} < \alpha$$

Μάθημα 2

Η γωνία - Ο κύκλος

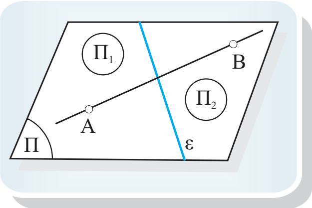
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ημιεπίπεδο

Κάθε ευθεία ε επιπέδου Π χωρίζει τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στην ε σε δύο σημειοσύνολα $Π_1$, $Π_2$ τα οποία ονομάζονται ***ημιεπίπεδα*** με την ιδιότητα:

Αν Α σημείο του $Π_1$ και Β σημείο του $Π_2$ τότε η ευθεία ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ,ενώ αν Α και Β σημεία του ίδιου ημιεπιπέδου η ευθεία ε και το ΑΒ δεν τέμνονται.

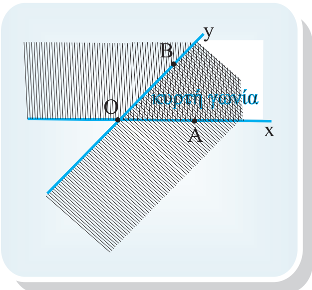
Το ημιεπίπεδο $Π_1$ το συμβολίζουμε (ε,Α) και το $Π_2$ αντίστοιχα (ε,Β).



Η γωνία

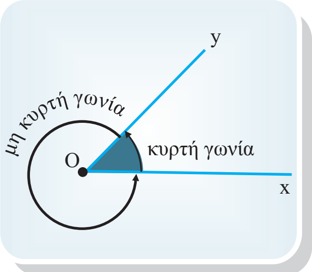
Θεωρούμε δύο ημιευθείες Οx και Οy και τα σημεία Α και Β αυτών.

Κυρτή γωνία ή ***γωνία*** ονομάζεται το μέρος του επιπέδου που ορίζεται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (Οx,Β) και (Οy,Α).Το σημείο Ο λέγεται ***κορυφή*** της γωνίας.



Συμβολίζουμε με $x\hat{O}y$ ή $y\hat{O}x$, ή $A\hat{O}B$ ή $B\hat{O}A$.Τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στις πλευρές είναι τα εσωτερικά σημεία της γωνίας.

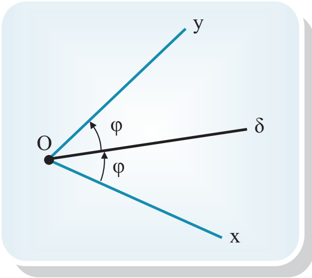
Τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία μαζί με τα σημεία των ημιευθειών Οx και Οy λέγεται ***μή κυρτή γωνία***.



Σύγκριση γωνιών

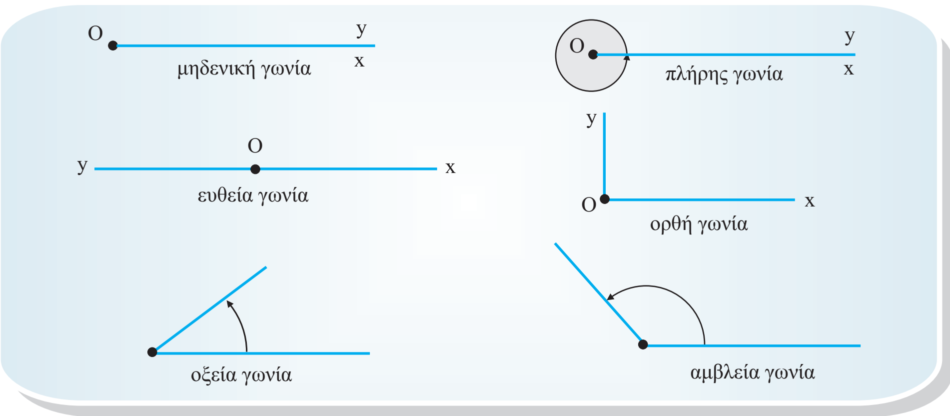
Για να συγκρίνουμε δυο γωνίες τις μετατοπίζουμε κατάλληλα ώστε να συμπέσουν οι κορυφές τους και μια πλευρά τους. Αν και οι άλλες πλευρές συμπίπτουν τότε οι γωνίες είναι ίσες, διαφορετικά η γωνία της οποίας η πλευρά βρίσκεται στο εσωτερικό της άλλης γωνίας είναι η μικρότερη.

Διχοτόμος γωνίας είναι η ημιευθεία που βρίσκεται στο εσωτερικό μιας γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.
Κάθε γωνία έχει μία μόνο διχοτόμο.

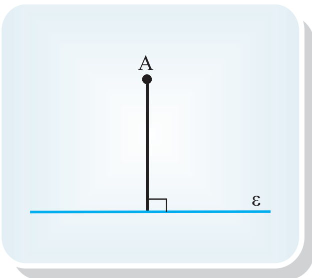


Είδη γωνιών

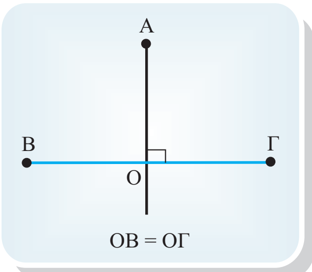
- ***Μηδενική γωνία*** λέγεται η κυρτή γωνία της οποίας οι πλευρές συμπίπτουν.
- ***Πλήρης γωνία*** είναι η μη κυρτή γωνία η αντίστοιχη της μηδενικής.
- ***Ευθεία γωνία*** λέγεται η γωνία της οποίας οι πλευρές είναι αντικείμενες ημιευθείες.
- ***Ορθή γωνία*** είναι μία από τις δύο ίσες γωνίες που σχηματίζει η διχοτόμος της ευθείας γωνίας. Οι πλευρές μιας ορθής γωνίας λέμε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους.



- ***Οξεία γωνία*** λέγεται μια γωνία μικρότερη από μια ορθή.
- ***Αμβλεία γωνία*** λέγεται μια γωνία μεγαλύτερη από μια ορθή.

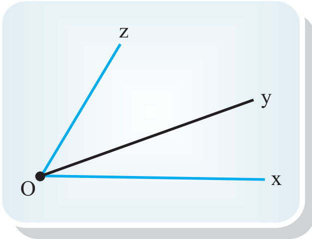


Απόσταση σημείου Α από ευθεία ε ονομάζεται το μήκος του μοναδικού ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει κάθετα το σημείο Α με την ευθεία ε.
Απο κάθε σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή.
Απο κάθε σημείο ευθείας άγεται μία μόνο κάθετος σε αυτή.



Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι η μοναδική ευθεία η οποία διέρχεται κάθετα από το μέσο Ο του

ΒΓ.Τα σημεία Β,Γ λέγονται ***συμμετρικά*** ως προς την ευθεία ΑΟ και η ευθεία ΑΟ λέγεται άξονας ***συμμετρίας.***



Πράξεις μεταξύ γωνιών

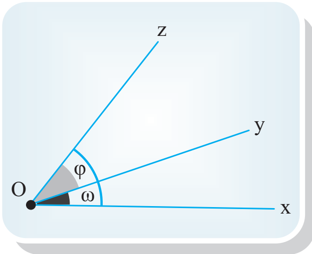
Εφεξής ονομάζονται δύο γωνίες οι οποίες έχουν :

- κοινή κορυφή
- μια πλευρά κοινή
- τις μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής.

π.χ οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ είναι εφεξής.

Δύο εφεξής γωνίες είναι πάντοτε ***διαδοχικές.***

Α. Πρόσθεση γωνιών

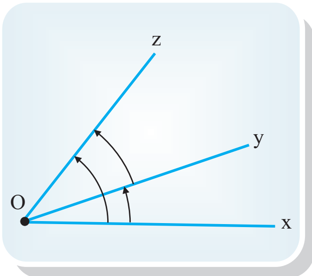


Για να προσθέσουμε δύο γωνίες τις μετατοπίζουμε κατάλληλα ώστε να γίνουν εφεξής. Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

$x\hat{O}y = \omega$, $y\hat{O}z = \varphi$ και $x\hat{O}z = x\hat{O}y + y\hat{O}z = \omega + \varphi$

- Το άθροισμα μιας κυρτής και της μη κυρτής με την ίδια κορυφή και τις ίδιες πλευρές , είναι το επίπεδο.
- Η πρόσθεση γωνιών επεκτείνεται και για περισσότερες απο δύο γωνίες. Το άθροισμα όμως δύο ή περισσότερων γωνιών,δεν είναι πάντοτε γωνία με τον ορισμό που δώσαμε **, διότι μπορεί το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο απο μια πλήρη γωνία.**

Β. Αφαίρεση γωνιών



Για να αφαιρέσουμε δύο γωνίες τις μετατοπίζουμε κατάλληλα ώστε να συμπίπτουν οι κορυφές τους, και η μια πλευρά τους.

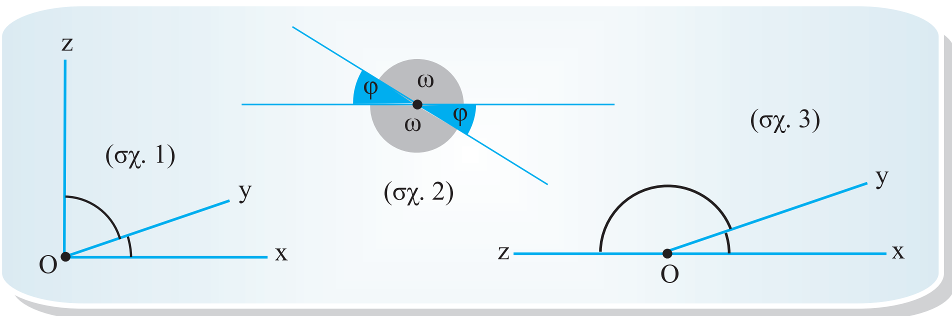
Στο διπλανό σχήμα έχουμε: $x\hat{O}z - x\hat{O}y = y\hat{O}z$

Γ. Γινόμενο φυσικού αριθμού με γωνία

Για να πολλαπλασιάσουμε μία γωνία με φυσικό αριθμό ν, αθροίζουμε ν διαδοχικές γωνίες ίσες με την αρχική γωνία. Για παράδειγμα, γράφουμε: $\nu \cdot x\hat{O}z = \underbrace{x\hat{O}z + x\hat{O}z + \cdots + x\hat{O}z}_{\nu \text{ όροι}}$

Γωνίες με ορισμένη σχέση

Συμπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες με άθροισμα ίσο με μία ορθή (σχ. 1).
Παραπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες με άθροισμα ίσο με μία ευθεία γωνία (σχ. 3).

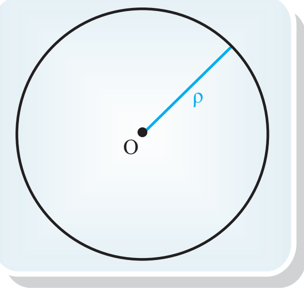


Αποδεικνύεται ότι δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές

τους αντικείμενες και αντίστροφα.
Κατακορυφήν ονομάζονται δύο γωνίες με κοινή κορυφή και αντίστοιχες πλευρές αντικείμενες (σχ. 2).
Αποδεικνύεται ότι:
Για τις κατακορυφήν γωνίες ισχύουν:

ι. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
ιι. Οι διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες.

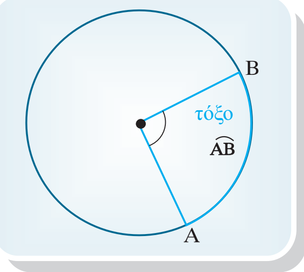
Κύκλος είναι το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία ισαπέχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο Ο και συμβολίζεται με (Ο,ρ). Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο** του κύκλου και η απόσταση ρ **ακτίνα** του κύκλου.



Ίσοι λέγονται δύο κύκλοι αν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν μεταξύ τους. Δύο ίσοι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες και αντίστροφα.

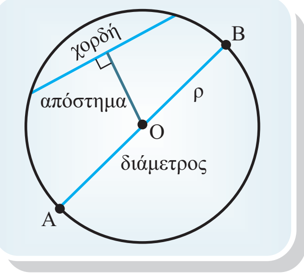
Στοιχεία του κύκλου

Τόξο είναι το τμήμα του κύκλου που ορίζεται από δύο τυχαία σημεία του κύκλου.
Χορδή είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο τυχαία σημεία του κύκλου.
Απόστημα χορδής λέμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται απο το κέντρο του κύκλου πρός τη χορδή.
Διάμετρος κύκλου είναι μία χορδή που διέρχεται από το κέντρο του.



Σύγκριση τόξων

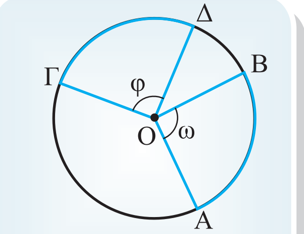
Ισα λέγονται δύο τόξα αν με κατάλληλη μετατόπιση πάνω στον κύκλο συμπίπτουν τα άκρα τους. Διαφορετικά το τόξο του οποίου το άκρο είναι εσωτερικό του άλλου τόξου είναι το μικρότερο. *Η σύγκριση τόξων έχει νόημα όταν τα τόξα βρίσκονται στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους.*



Επίκεντρη λέγεται μία γωνία που έχει την κορυφή της στο κέντρο ενός κύκλου. Οι πλευρές της επίκεντρης γωνίας ορίζουν στον κύκλο το αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας και λέμε ότι η γωνία βαίνει στο τόξο ΑΒ.

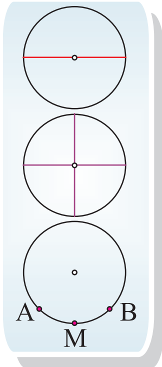
Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα ,αν και μόνον αν, οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους είναι ίσες.



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \omega = \varphi$
$\overset{\frown}{B\Delta} < \overset{\frown}{AB} \Leftrightarrow B\hat{O}\Delta < A\hat{O}B$

Άμεσα συμπεραίνουμε ότι:



- *Κάθε διάμετρος διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα τόξα που λέγονται **ημικύκλια**.*

- *Δύο κάθετες διάμετροι διαιρούν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα που λέγονται **τεταρτοκύκλια.***

- *Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους είναι επίσης άνισες.*
- *Το μέσο κάθε τόξου είναι μοναδικό.*

Μέτρο τόξου και γωνίας

Μέτρο τόξου είναι ο θετικός αριθμός που εκφράζει τη σχέση του τόξου με το τόξο μιας μοίρας. **Τόξο μιας μοίρας** είναι το τόξο που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία μιας μοίρας (1°).

Μέτρο γωνίας είναι το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει αν την καταστήσουμε επίκεντρη.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κάνουμε ένα σχήμα και σημειώνουμε τις ίσες γωνίες με τα ίδια γράμματα και έχουμε υπόψη μας τα εξής:
- Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα 90°, οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα 180°.
- Η διχοτόμος μιας γωνίας τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.
- Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

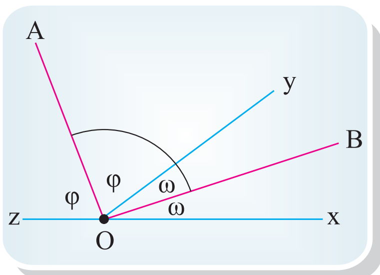
Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1
Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

Λύση

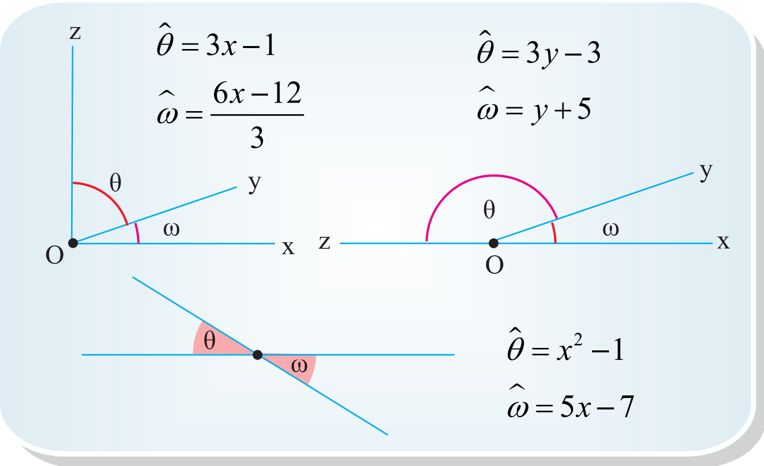
Αρκεί να αποδείξουμε ότι η γωνία ΑΟΒ είναι 90°.
Σημειώνουμε τις ίσες γωνίες του σχήματος και έχουμε:

$$2\omega + 2\varphi = 180^0 \Leftrightarrow \omega + \varphi = 90^0 \Leftrightarrow A\hat{O}B = 90^0 .$$



Άσκηση 2

Να υπολογίσετε τον άγνωστο x στις παρακάτω περιπτώσεις.



Λύση

ι. Οι γωνίες ω και θ είναι συμπληρωματικές,οπότε έχουμε:

$$\hat{\omega} + \hat{\theta} = 90^0 \Leftrightarrow \frac{6x - 12^o}{3} + 3x - 1^o = 90^0 \Leftrightarrow 6x^o - 12^o + 9x - 3^o = 270^0 \Leftrightarrow$$

$$15x = 285^o \Leftrightarrow x = 19^0$$

ιι. Οι γωνίες ω και θ είναι παραπληρωματικές,οπότε έχουμε:

$$\hat{\omega} + \hat{\theta} = 180^0 \Leftrightarrow x + 5^o + 3x - 3^o = 180^0 \Leftrightarrow 4x = 178^0 \Leftrightarrow x = 44,5^0$$

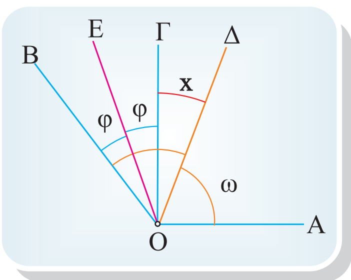
ιιι. Οι γωνίες ω και θ είναι κατακορυφήν ,οπότε έχουμε :

$$\hat{\omega} = \hat{\theta} \Leftrightarrow 5x - 7^o = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6^o = 0^o \Leftrightarrow x = 2^o \text{ ή } x = 3^o$$

Άσκηση 3

Θεωρούμε αμβλεία γωνία $A\hat{O}B$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $O\Gamma \perp OA$. Αν ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{O}E = 45^0$.

Λύση



Αν ονομάσουμε τις ίσες γωνίες με ω και φ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και τη γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta = x$, αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\varphi + x = \frac{x+\omega}{2}$

Έχουμε $\varphi + x = \frac{x+\omega}{2} \Leftrightarrow 2\varphi + 2x = x + \omega \Leftrightarrow 2\varphi + x = \omega$, που ισχύει.

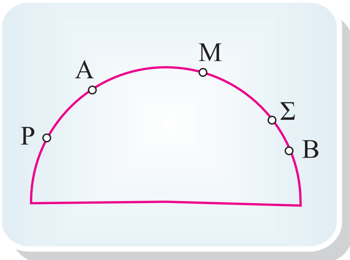
Άσκηση 4

Έστω Α,Β σημεία ημικυκλίου και Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.

i. Αν Ρ σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο $\overset{\frown}{AB}$ τότε αποδείξτε ότι $\overset{\frown}{PM} = \frac{\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB}}{2}$.

ii. Αν Σ σημείο του τόξου $\overset{\frown}{MB}$ τότε αποδείξτε ότι: $\overset{\frown}{\Sigma M} = \frac{\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B}}{2}$.

Λύση



i. Αφού το Μ είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.
Τότε έχουμε:

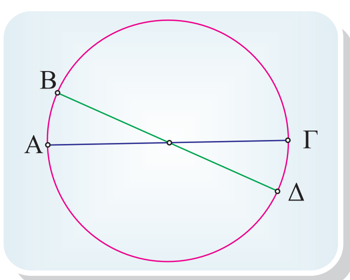
$$\frac{\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PA} + 2\overset{\frown}{AM}}{2} = \frac{2\overset{\frown}{PA} + 2\overset{\frown}{AM}}{2} =$$

$$= \frac{2\left(\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{AM}\right)}{2} = \overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{PM}$$

ii. $$\frac{\overset{\frown}{\Sigma A} - \overset{\frown}{\Sigma B}}{2} = \frac{\overset{\frown}{\Sigma M} + \overset{\frown}{MA} - \left(\overset{\frown}{MB} - \overset{\frown}{\Sigma M}\right)}{2} = \frac{2\overset{\frown}{\Sigma M}}{2} = \overset{\frown}{\Sigma M}$$

Άσκηση 5

Με βάση το διπλανό σχήμα να υπολογιστούν οι x και y αν $\overset{\frown}{AB} = 2x$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 2y + 3$ και $\overset{\frown}{A\Delta} = 200^0$.



Λύση

Είναι $\overset{\frown}{ΑΔ} = 200^0 \Leftrightarrow \overset{\frown}{ΑΓ} + \overset{\frown}{ΓΔ} = 200^0 \Leftrightarrow$

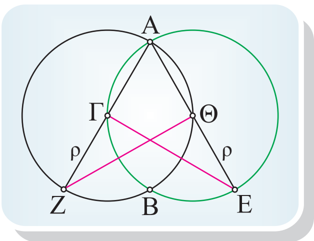
$180^0 + \overset{\frown}{ΓΔ} = 200^0 \Leftrightarrow \overset{\frown}{ΓΔ} = 20^0 \Leftrightarrow 2x = 20^0 \Leftrightarrow x = 10^0$

$\overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΒΓ} = 180^0 \Leftrightarrow 20^0 + 2y + 3 = 180^0 \Leftrightarrow y = 78,5^0$

Άσκηση 6

Σε κύκλο (Θ, ρ) παίρνουμε σημείο Γ και γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ). Ονομάζουμε Α ένα κοινό σημείο των κύκλων και φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΕ και ΑΖ των κύκλων (Θ, ρ) και (Γ, ρ) αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΓ και ΘΖ είναι ίσα.

Λύση



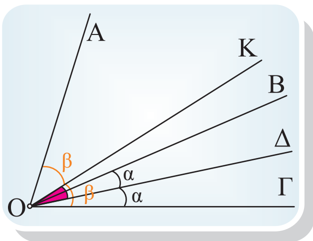
Είναι $\overset{\frown}{ΑΓΕ} = \overset{\frown}{ΑΘΖ}$ (ημικύκλια ίσων κύκλων) και $\overset{\frown}{ΑΘ} = \overset{\frown}{ΑΓ}$ (τόξα των ίσων χορδών ΑΘ και ΑΓ). Άρα $\overset{\frown}{ΕΓ} = \overset{\frown}{ΘΖ}$ (διαφορές ίσων τόξων). Επομένως $ΕΓ = ΘΖ$ (ως χορδές ίσων τόξων).

Άσκηση 7

Δύο γωνίες ΑΟΓ και ΒΟΓ έχουν κοινή κορυφή, κοινή πλευρά και δεν είναι εφεξείς. Να δειχθεί ότι η γωνία των διχοτόμων των γωνιών είναι ίση με την ημιδιαφορά των γωνιών.

Λύση

Φέρνουμε τις ΟΚ, ΟΔ διχοτόμους των $Α\hat{Ο}Γ$ και $Β\hat{Ο}Γ$.

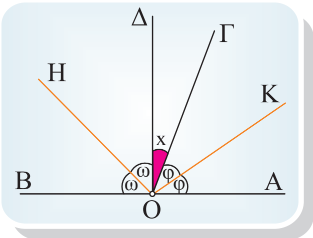


Είναι $Δ\hat{Ο}Κ = \hat{β} - \hat{α} = \dfrac{Α\hat{Ο}Γ}{2} - \dfrac{Β\hat{Ο}Γ}{2} = \dfrac{Α\hat{Ο}Γ - Β\hat{Ο}Γ}{2}$.

Άσκηση 8

Από σημείο Ο μιας ευθείας ΑΒ φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της ΑΒ ημιευθείες ΟΓ και ΟΔ τέτοιες ώστε, οι γωνίες ΑΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΒ να είναι διαδοχικές. Αν ΟΚ και ΟΗ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ΑΟΓ και ΒΟΔ αντίστοιχα και $K\hat{O}H = 100^o$, να υπολογισθεί η γωνία ΓΟΔ.

Λύση



Είναι $\hat{\varphi} + \hat{x} + \hat{\omega} = 100^o \Leftrightarrow 2\hat{\varphi} + 2\hat{x} + 2\hat{\omega} = 200^o$ (1)

Ακόμα είναι : $2\hat{\varphi} + \hat{x} + 2\hat{\omega} = 180^o$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{x} = 20^o$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

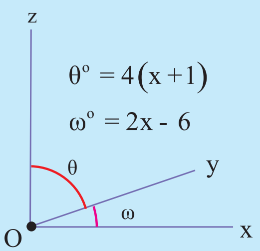
1. Να υπολογίσετε τη γωνία ω σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

ι. η γωνία ω είναι τετραπλάσια από την παραπληρωματική της.

ιι. η γωνία ω είναι κατά 10° μικρότερη από την συμπληρωματική της.

ιιι. η παραπληρωματική της γωνίας ω και η συμπληρωματική της έχουν άθροισμα ίσο με 220°.

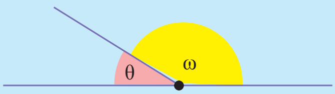
2. Να υπολογίσετε τον άγνωστο x στις παρακάτω περιπτώσεις.



$\theta^o = 4(x+1)$

$\omega^o = 2x - 6$

$8\theta^o - 2\omega^o = 90^0$



3. Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω στις παρακάτω περιπτώσεις:

ι. οι γωνίες είναι συμπληρωματικές και η διαφορά τους ισούται με το 1/9 της ορθής.

ιι. οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και η διαφορά τους ισούται με τα 10/9 της ορθής.

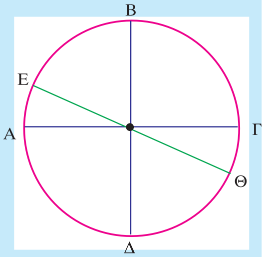
4. Έστω ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ τέτοιες ώστε οι ημιευθείες Οx και Οy να είναι αντίστοιχα οι διχοτόμοι τους. Αν οι ημιευθείες ΟΒ και ΟΓ βρίσκονται στο εσωτερικό της $x\hat{O}y$, δείξτε ότι οι $A\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Delta$ είναι παραπληρωματικές.

5. Έστω οι ημιευθείες ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ και ΟΔ τέτοιες ώστε η γωνία $B\hat{O}\Gamma$ να είναι ορθή. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{O}\Delta$ αν:

ι. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι συμπληρωματικές.

ιι. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι παραπληρωματικές.

6. Έστω οι γωνίες ω και φ οι οποίες έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν είναι εφεξής. Αν η διαφορά τους είναι ίση με 90°, δείξτε ότι η διαφορά των διχοτόμων τους είναι ίση με 45°.



7. Να υπολογιστούν τα τόξα $\overset{\frown}{AE}$ και $\overset{\frown}{A\Theta}$ στο διπλανό σχήμα αν ισχύουν $\overset{\frown}{A\Theta} + \overset{\frown}{EB} = 3\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Delta\Theta} = \frac{1}{5}\overset{\frown}{B\Theta}$.

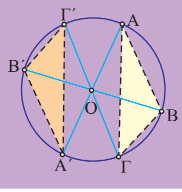
8. Έστω γωνία $\widehat{AOB}$ και ημιευθεία ΟΓ στο εσωτερικό της τέτοια ώστε $3\widehat{AO\Gamma} = 5\widehat{BO\Gamma}$. Αν η ημιευθεία ΟΔ είναι εσωτερική της $\widehat{BO\Gamma}$ να δείξετε ότι $\widehat{\Gamma O\Delta} = \dfrac{3\widehat{AO\Delta} - 5\widehat{BO\Delta}}{8}$

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ενός κύκλου (Ο,ρ) και σημείο Μ τέτοιο ώστε $\overset{\frown}{AM} = \frac{\mu}{\nu}\overset{\frown}{MB}$. Δείξτε ότι για τυχαίο σημείο Σ του κύκλου εξωτερικό του τόξου ΜΑ ισχύει $\overset{\frown}{\Sigma M} = \frac{\nu}{\mu+\nu}\overset{\frown}{\Sigma A} + \frac{\mu}{\mu+\nu}\overset{\frown}{\Sigma B}$.

3ο μάθημα

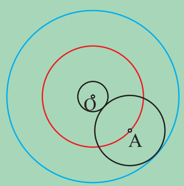
Τρίγωνα



3ο Κεφάλαιο

4ο μάθημα

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι - Ανισοτικές σχέσεις



Μάθημα 3

Τρίγωνα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός - Κύρια στοιχεία τριγώνου

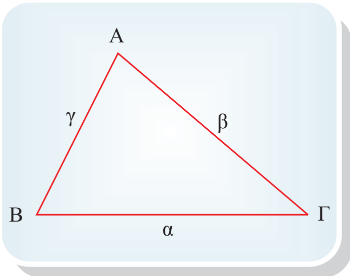
Τρίγωνο ονομάζεται ένα πολύγωνο με τρεις πλευρές και τρεις γωνίες. Οι πλευρές και οι γωνίες είναι τα κύρια στοιχεία του τριγώνου.
Οι σχετικές θέσεις των γωνιών ως προς τις πλευρές είναι:

Γωνία περιεχόμενη σε δυο πλευρές:

Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι περιεχόμενη στις πλευρές α και β.

Γωνία απέναντι από πλευρά:

Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι απέναντι από την πλευρά γ.

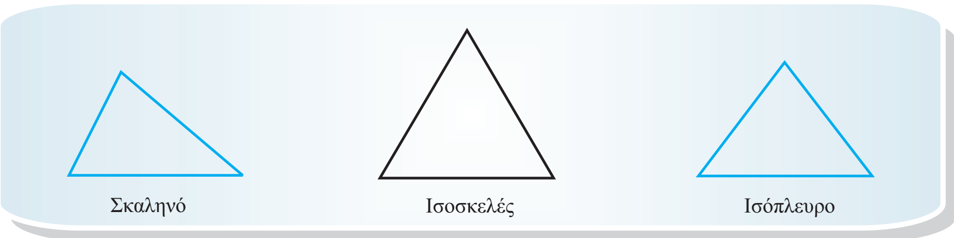


Γωνίες προσκείμενες σε πλευρά:

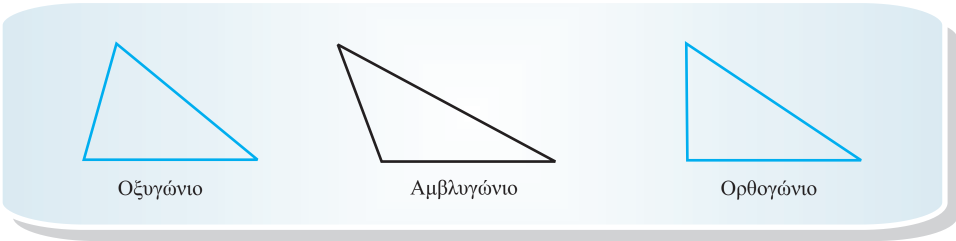
Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{\Gamma}$ και η γωνία $\hat{B}$ είναι προσκείμενες στην πλευρά α.

Τα τρίγωνα ανάλογα με τις πλευρές τους χωρίζονται σε:

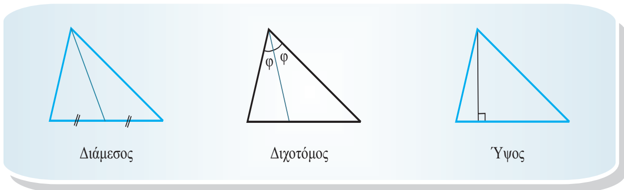
- ***Σκαληνά***, αν έχουν άνισες πλευρές.
- ***Ισοσκελή***, αν έχουν δυο πλευρές ίσες. Τότε η τρίτη πλευρά λέγεται **βάση** του τριγώνου και η απέναντι της κορυφή λέγεται **κορυφή** αυτού.
- ***Ισόπλευρα***, αν και οι τρείς πλευρές είναι ίσες.



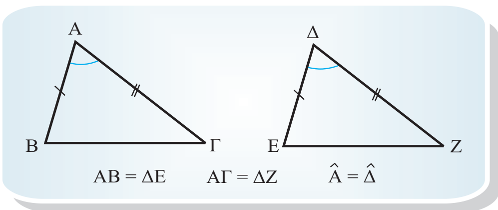
Τα τρίγωνα ανάλογα με τις γωνίες τους χωρίζονται σε:
• ***Οξυγώνια***, αν και οι τρείς γωνίες τους είναι οξείες.
• ***Ορθογώνια***, αν έχουν μια ορθή γωνία. Τότε οι δυο πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία λέγονται **κάθετες** και η πλευρά που είναι απέναντι απο την ορθή λέγεται **υποτείνουσα**.
• ***Αμβλυγώνια***, αν έχουν μια αμβλεία γωνία.



Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου (*διάμεσοι, διχοτόμοι, ύψη*)
Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι:
• ***Η διάμεσος*** που είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
• ***Η διχοτόμος*** που είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας,απο την κορυφή μέχρι την απέναντι πλευρά.
• ***Το ύψος*** που είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται απο μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

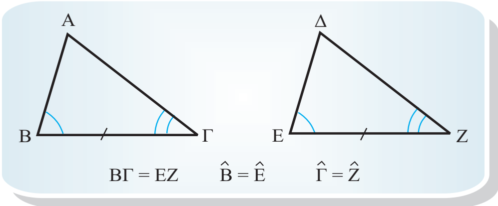


Κριτήρια ισότητας τριγώνων
1ο Κριτήριο (Π-Γ-Π)
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



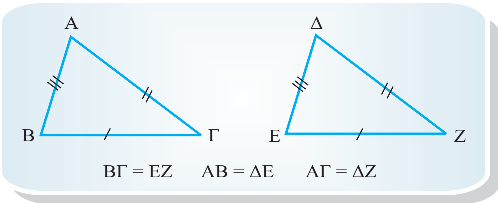
2º Κριτήριο (Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



3º Κριτήριο (Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Παρατήρηση: Το κριτήριο (Γ-Π-Γ) γενικεύεται για μια πλευρά και δύο γωνίες όχι απαραίτητα προσκείμενες στην πλευρά.
Δηλαδή **αν δυο τρίγωνα έχουν μόνο μια πλευρά αντίστοιχα ίση και δυο οποιεσδήποτε γωνίες ίσες τότε είναι ίσα.**

Ειδικότερα για δύο ορθογώνια τρίγωνα ισχύουν τα επόμενα
κριτήρια ισότητας:

1ο Κριτήριο

- **Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες, τότε είναι ίσα.**

2ο Κριτήριο

- **Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.**

Με τη βοήθεια των παραπάνω κριτηρίων αποδεικνύονται τα επόμενα πορίσματα και θεωρήματα:

1. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
2. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι ταυτόχρονα ύψος και διάμεσος.
3. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται απο την κορυφή είναι ταυτόχρονα διχοτόμος και διάμεσος.
4. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που άγεται απο την κορυφή είναι ταυτόχρονα ύψος και διχοτόμος .
5. Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.
6. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του

ευθύγραμμου τμήματος και αντίστροφα αν ένα σημείο ισαπέχει απο τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος τότε ανήκει στη μεσοκάθετο αυτού.

7. Σε κάθε κύκλο, αν δύο τόξα είναι ίσα τότε και οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες και αντίστροφα.

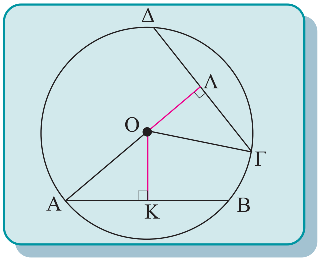
(**Σημείωση**: το αντίστροφο ισχύει δεδομένου ότι και τα δύο τόξα είναι μεγαλύτερα ή μικρότερα του ημικυκλίου.)

8. Σε κάθε κύκλο η κάθετος από το κέντρο του προς μια χορδή, διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Θεώρημα

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη



$K\overset{\Delta}{O}A = \Lambda\overset{\Delta}{O}\Gamma$ διότι: $\begin{pmatrix} \hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^o \\ OA = O\Gamma = \rho \\ AK = \Gamma\Lambda \end{pmatrix}$

άρα είναι $OK = O\Lambda$.

Αντίστροφα:

Αν $OK = O\Lambda$, τότε $K\overset{\Delta}{O}A = \Lambda\overset{\Delta}{O}\Gamma$, διότι:

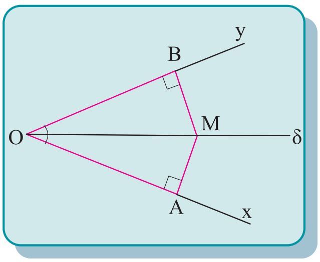
$$\begin{pmatrix} \hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^o \\ OA = OB = \rho \\ OK = O\Lambda \end{pmatrix}$$

Επομένως $AK = \Gamma\Lambda \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta$

Θεώρημα

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα.

Απόδειξη



$A\overset{\Delta}{O}M = B\overset{\Delta}{O}M$ διότι: $\begin{pmatrix} A = B = 90^o \\ OM : \text{κοινή} \\ M\hat{O}A = M\hat{O}B \end{pmatrix}$

Επομένως, $MA = MB$

Αντίστροφα:

Αν $MA = MB$ τότε $A\overset{\Delta}{O}M = B\overset{\Delta}{O}M$, διότι: $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$, OM κοινή, $MA = MB$.

Επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$ δηλαδή ανήκει στη διχοτόμο Οδ.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μέθοδος 1

1. **Για να δείξουμε ότι δυο τρίγωνα είναι ίσα,** αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούν ένα απο τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Δηλ.
   - έχουν τις πλευρές τους ίσες μια προς μια, ή
   - έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, ή
   - έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία πρός μία.

Μέθοδος 2

2. **Για να δείξουμε ότι δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα**, αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούν ένα απο τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. Δηλ.
   - έχουν δυο κάθετες πλευρές ίσες μια προς μια, ή
   - έχουν μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία πρός μία.

Μέθοδος 3

3. **Για να δείξουμε ότι δυο ευθύγραμμα τμήματα ή δυο γωνίες είναι ίσες** αναζητούμε κατάλληλα τρίγωνα - τα οποία έχουν στοιχεία τα ζητούμενα - και δείχνουμε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Μέθοδος 4

4. **Για να δείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές**, αρκεί να δείξουμε ότι
   - έχει δυο πλευρές ίσες ή
   - έχει δυο γωνίες ίσες, ή
   - το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή με τη βάση είναι:

     α. ύψος και διάμεσος

     β. ύψος και διχοτόμος

     γ. διάμεσος και διχοτόμος.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

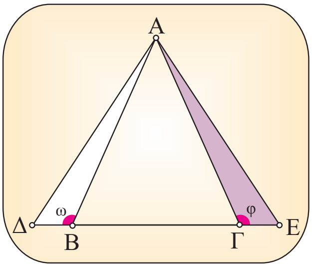
Άσκηση 1

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ κατά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α. οι γωνίες $\widehat{AB\Delta}$ και $\widehat{A\Gamma E}$ είναι ίσες

β. το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση



α. Είναι $\hat{B}+\hat{\omega}=180^o$, $\hat{\Gamma}+\hat{\varphi}=180^o$ και επειδή $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ παίρνουμε : $\hat{B}+\hat{\omega}=\hat{\Gamma}+\hat{\varphi}\Rightarrow\hat{\omega}=\hat{\varphi}$.

β. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

ΑΒ = ΑΓ (από υπόθεση)

$\hat{\omega}=\hat{\varphi}$ (από α. ερώτημα)

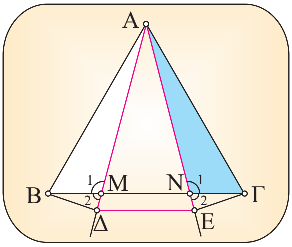
ΒΔ = ΓΕ (από υπόθεση).

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν τις δύο πλευρές τους ίσες και τις αντίστοιχα περιεχόμενες γωνίες ίσες. Οπότε ΑΔ = ΑΕ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 2

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε στη ΒΓ τα σημεία Μ και Ν, ώστε ΒΜ = ΓΝ. Εάν Δ και Ε είναι οι προβολές των Β και Γ στις ΑΜ και ΑΝ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση



Στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΝΓ είναι:

ΑΒ = ΑΓ, $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (γωνίες βάσης ισοσκελούς) και ΒΜ = ΝΓ (από υπόθεση). Άρα είναι ίσα , οπότε ΑΜ = ΑΝ και $\hat{M}_1=\hat{N}_1\Rightarrow\hat{M}_2=\hat{N}_2$ (παραπληρωματικές των $\hat{M}_1,\hat{N}_1$).

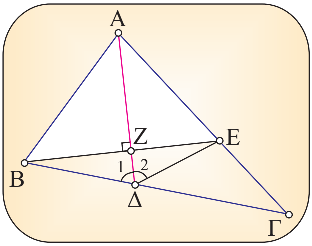
Στα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΝΕ έχουμε:

$\hat{\Delta}=\hat{E}=90^o$, ΒΜ = ΝΓ , $\hat{M}_2=\hat{N}_2$. Άρα είναι ίσα και συνεπώς ΜΔ = ΝΕ. Τότε ΑΜ + ΜΔ = ΑΝ + ΝΕ ή ΑΔ = ΑΕ.

Άσκηση 3

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. Από την κορυφή Β φέρνουμε τη $B Z \perp A\Delta$, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να δειχθεί ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΔΕ.

Λύση

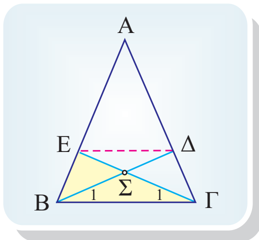


Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (η ΑΖ είναι διχοτόμος και ύψος). Άρα είναι και διάμεσος δηλ. το Ζ είναι μέσο της ΒΕ. Επομένως στο τρίγωνο ΒΔΕ, η ΔΖ είναι διάμεσος και ύψος, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές, άρα η ΔΖ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{\Delta}E}$.

Άσκηση 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Σ εσωτερικό σημείο του. Οι ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Αν $\mathrm{B\Delta = \Gamma E}$ και $\widehat{\mathrm{B\Delta E}} = \widehat{\mathrm{\Gamma E\Delta}}$ δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

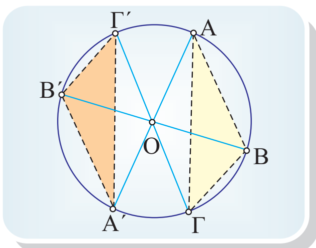


Επειδή $\widehat{\mathrm{B\Delta E}} = \widehat{\mathrm{\Gamma E\Delta}}$ το τρίγωνο ΣΕΔ είναι ισοσκελές.
Άρα $\mathrm{\Sigma E = \Sigma\Delta}$ (1).
Από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{\Gamma E = B\Delta}$ (2).
Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε: $\mathrm{\Gamma\Sigma = B\Sigma}$.
Άρα $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1$.
Επίσης τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ είναι ίσα διότι:
- $\mathrm{B\Delta = \Gamma E}$,απο την υπόθεση
- $\mathrm{B\Gamma = B\Gamma}$,κοινή πλευρά
- $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1$.Άρα θα έχουν και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 5

Έστω κύκλος (Ο,ρ) και ΑΑ΄,ΒΒ΄,ΓΓ΄ διάμετροι. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄είναι ίσα.

Λύση



Είναι

$\widehat{\mathrm{AOB}} = \widehat{\mathrm{A'OB'}}$, $\widehat{\mathrm{BO\Gamma}} = \widehat{\mathrm{B'O\Gamma'}}$, $\widehat{\mathrm{AO\Gamma}} = \widehat{\mathrm{A'O\Gamma'}}$ ως κατά κορυφήν γωνίες. Επειδή είναι και επίκεντρες οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες.
Δηλαδή $\mathrm{AB = A'B'}$, $\mathrm{B\Gamma = B'\Gamma'}$ και $\mathrm{A\Gamma = A'\Gamma'}$, που σημαίνει ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

Άσκηση 6

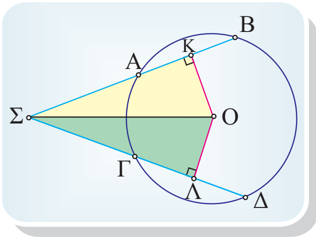
Έστω κύκλος (Ο, ρ) και δύο ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ με αποστήματα ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα.

Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο σημείο Σ, δείξτε ότι:
i) τα τρίγωνα ΣΟΚ και ΣΟΛ είναι ίσα.
ii) ΣΑ = ΣΓ και ΣΒ = ΣΔ.

Λύση

i) Τα τρίγωνα ΣΟΚ και ΣΟΛ είναι ορθογώνια και έχουν την ΣΟ κοινή πλευρά και ΟΚ = ΟΛ ,ως αποστήματα ίσων χορδών. Άρα είναι ίσα.

ii. Από το i. ερώτημα έχουμε ΣΚ = ΣΛ.Επειδή οι ΟΚ και ΟΛ διχοτομούν τις ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα και ΑΒ = ΓΔ θα είναι και ΑΚ = ΓΛ.
Οπότε ΣΑ = ΣΚ - ΑΚ = ΣΛ - ΓΛ = ΣΓ και
ΣΒ = ΣΚ + ΚΒ = ΣΛ + ΛΔ = ΣΔ.

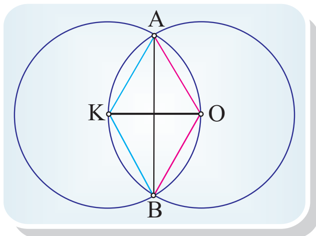


Άσκηση 7
Έστω κύκλος (Ο,ρ) και Κ τυχαίο σημείο του. Αν ο κύκλος (Κ,ρ) τέμνει τον προηγούμενο στα σημεία Α και Β, δείξτε ότι:
i. οι γωνίες ΑΟΒ και ΑΚΒ είναι ίσες και η ΟΚ είναι διχοτόμος τους.
ii. οι ΟΚ και ΑΒ είναι κάθετες.

Λύση

i. Επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι και η ΑΒ είναι κοινή χορδή, τα τόξα $\widehat{AOB}$ και $\widehat{AKB}$ είναι ίσα άρα και οι αντίστοιχες επί-κεντρες γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{AKB}$ είναι ίσες.

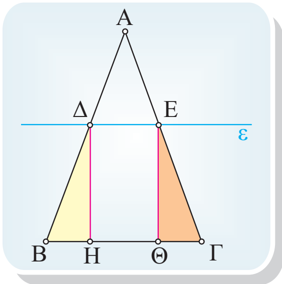
Επίσης ΟΑ = ΟΒ = ρ οπότε και $\widehat{OA} = \widehat{OB}$,συνεπώς $A\hat{K}O = B\hat{K}O$. Άρα η ΚΟ είναι διχοτόμος της $\widehat{AKB}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι είναι διχοτόμος της $\widehat{AOB}$.



ii. Επειδή το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές (ΚΑ = ΚΒ = ρ) η διχοτόμος της $\widehat{AKB}$ είναι και ύψος του τριγώνου. Άρα $AB \perp KO$.

Άσκηση 8
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη στην βάση ΒΓ , που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η και Θ είναι οι προβολές των Δ και Ε αντίστοιχα πάνω στην ΒΓ, δείξτε ότι ΒΗ = ΓΘ.

Λύση



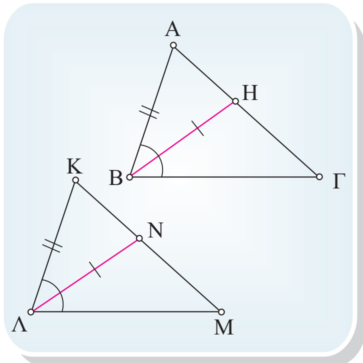
$$\text{Έχουμε} \left.\begin{array}{l} \hat{H}, \hat{\Theta} \text{ ορθές} \\ \Delta H = E\Theta \text{ (αποστάσεις μεταξύ παραλλήλων)} \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ (}\overset{\triangle}{AB\Gamma}\text{ ισοσκελές)} \end{array}\right\}$$

Άρα $B\overset{\triangle}{H}\Delta = \Gamma\overset{\triangle}{\Theta}E$.
Συνεπώς είναι και $BH = \Gamma\Theta$.

Άσκηση 9
Αν δύο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές αντίστοιχα ίσες , μια απο τις προσκείμενες σε αυτές γωνία ίση και τις αντίστοιχες διχοτόμους της ίσες, δείξτε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση

Έστω τρίγωνα ΑΒΓ, ΚΛΜ με διχοτόμους ΒΗ και ΛΝ και $AB = K\Lambda$, $BH = \Lambda N$ και $\hat{B} = \hat{\Lambda}$.
Τότε



$$\left.\begin{array}{l} AB = K\Lambda \text{ (απο υπόθεση)} \\ BH = \Lambda N \text{ (απο υπόθεση)} \\ A\hat{B}H = \dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{\hat{\Lambda}}{2} = K\hat{\Lambda}N \end{array}\right\}$$

Άρα $A\overset{\triangle}{B}H = K\overset{\triangle}{\Lambda}N$ και συνεπώς $\hat{A} = \hat{K}$

Επίσης

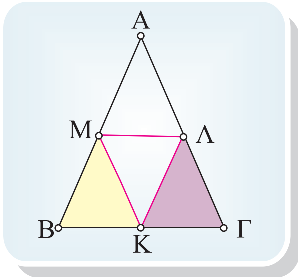
$$\left.\begin{array}{l} AB = K\Lambda \text{ (απο υπόθεση)} \\ \hat{B} = \hat{\Lambda} \text{ (απο υπόθεση)} \\ \hat{A} = \hat{K} \text{ (απο την (1))} \end{array}\right\} \text{Άρα } A\overset{\triangle}{B}\Gamma = K\overset{\triangle}{\Lambda}M$$

Άσκηση 10
Να δείξετε ότι αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου, σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο.

Λύση

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Κ, Λ, Μ τα μέσα των ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Τότε

$$\left.\begin{aligned} BM = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = \Lambda\Gamma \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \ \ (A\overset{\triangle}{B}\Gamma \text{ ισοσκελές}) \\ BK = \Gamma K \ \ (K \text{ μέσο}) \end{aligned}\right\}$$



Άρα $B\overset{\triangle}{M}K = \Gamma\overset{\triangle}{\Lambda}K$ και συνεπώς $K\Lambda = KM$

Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 11

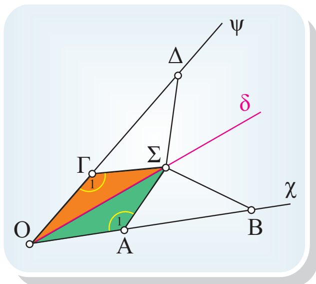
Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και τυχαίο σημείο Σ της διχοτόμου Οδ. Πάνω στην Οχ παίρνουμε τμήματα ΟΑ, ΟΒ και στην Οψ παίρνουμε
$O\Gamma = OA$ και $O\Delta = OB$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΣΑΒ και ΣΓΔ είναι ίσα.

Λύση

Έχουμε
$$\left.\begin{aligned} O\Gamma = OA \ \text{(απο υπόθ.)} \\ \Gamma\hat{O}\Sigma = A\hat{O}\Sigma \ \text{(Οδ διχοτ.)} \\ O\Sigma \ \text{κοινή πλευρά} \end{aligned}\right\} \text{Άρα } \Gamma\overset{\triangle}{O}\Sigma = A\overset{\triangle}{O}\Sigma \ \text{ και συνεπώς } \Sigma\Gamma = \Sigma A \quad (1)$$

και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$.

Είναι $\left.\begin{aligned} O\Delta = OB \\ O\Gamma = OA \end{aligned}\right\}$ τότε $O\Delta - O\Gamma = OB - OA \Leftrightarrow \Gamma\Delta = AB \quad (2)$.



Επίσης $\widehat{\Delta\Gamma\Sigma} = \widehat{\Sigma AB}$ (3) ως παραπληρώματα ίσων γωνιών.
Απο τις (1),(2) και (3) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΓΔΣ και ΑΒΣ είναι ίσα.

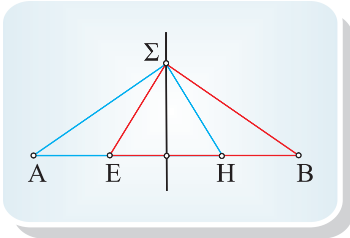
Άσκηση 12

Έστω Σ τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Η κάθετος προς τη ΣΑ από το Σ τέμνει την ΑΒ στο Η και η κάθετος προς τη ΣΒ από το Σ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Δείξτε ότι το Σ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΗΕ.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\Sigma E = \Sigma H$. Επειδή το Σ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ, ισχύει $\Sigma A = \Sigma B$

και συνεπώς $\hat{A} = \hat{B}$. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΣΗ και ΒΣΕ είναι ίσα. Οπότε θα είναι και ΣΕ = ΣΗ ,που σημαίνει ότι το Σ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΗΕ.



Άσκηση 13

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ (ΑΒ = ΑΓ). Εκατέρωθεν της ΒΓ φέρουμε στα άκρα της Β και Γ ημιευθείες κάθετες σ'αυτήν, επί των οποίων παίρνουμε τα ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ. Αφού δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ τέμνονται, έστω σε σημείο Μ, στη συνέχεια να δείξετε ότι $AM \perp B\Gamma$.

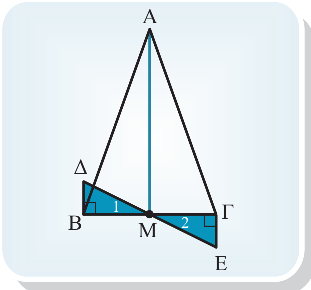
Λύση

Εφόσον τα Δ, Ε βρίσκονται εκατέρωθεν του ΒΓ και τα Β, Γ εκατέρωθεν του ΔΕ, τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ τέμνονται σε εσωτερικό τους σημείο Μ. Τα ορθογώνια τρίγωνα $M\overset{\Delta}{B}\Delta$ και $M\overset{\Delta}{\Gamma}E$ έχουν:

ΒΔ = ΓΕ (υπόθεση).

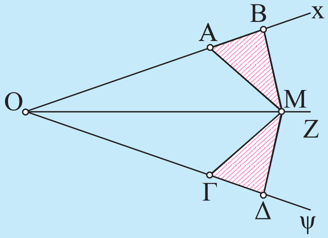
$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες).

Άρα $M\overset{\Delta}{B}\Delta = M\overset{\Delta}{\Gamma}E$, οπότε ΜΒ = ΜΓ. Δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Συνεπώς στο ισοσκελές τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ η ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση του ΒΓ, άρα θα είναι και ύψος, δηλαδή $AM \perp B\Gamma$.

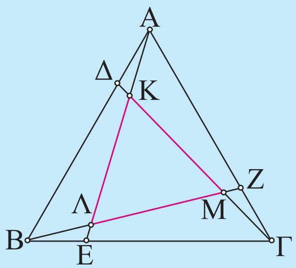


Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

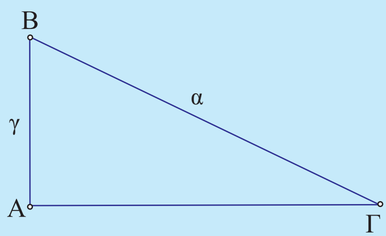
1. Δίνεται γωνία xOψ και ένα σημείο Μ της διχοτόμου ΟΖ. Στην Οx παίρνουμε τα τμήματα ΟΑ και ΟΒ και στην Οψ τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ, έτσι ώστε ΟΓ = ΟΑ και ΟΔ = ΟΒ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΓΔ είναι ίσα.



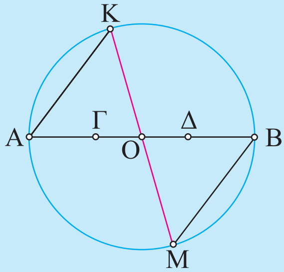
2. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ αντίστοιχα στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο, όπου Κ, Λ, Μ τα σημεία τομής των ΑΕ, ΓΔ, ΒΖ.



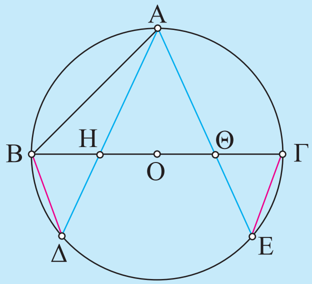
3. Μεταξύ των στοιχείων τριγώνου ΑΒΓ αληθεύουν συγχρόνως οι σχέσεις α = 2γ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



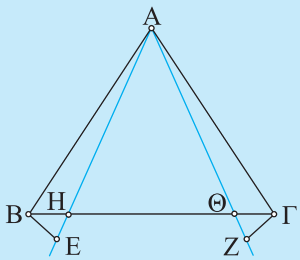
4. Έστω κύκλος διαμέτρου ΑΒ και Γ,Δ σημεία της που ισαπέχουν από το κέντρο Ο. Αν ΚΜ είναι διάμετρος, δείξτε ότι ΑΚ//ΒΜ.



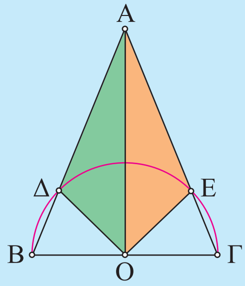
5. Έστω κύκλος (Ο,ρ) διαμέτρου ΒΓ και Α σημείο του κύκλου τέτοιο ώστε $Α\hat{Β}Γ = 45^{o}$. Αν Η και Θ είναι σημεία της ΒΓ τέτοια ώστε ΟΗ = ΟΘ και οι ΑΗ και ΑΘ τέμνουν τον κύκλο στα Δ και Ε αντίστοιχα, να δείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



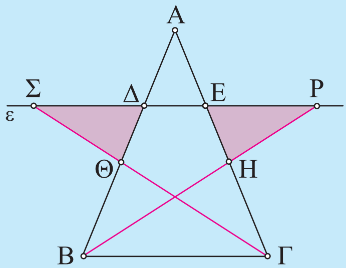
6. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και Η, Θ σημεία της βάσης ΒΓ τέτοια ώστε ΒΗ = ΓΘ. Αν Ε και Ζ είναι οι προβολές των Β και Γ πάνω στις ΑΗ και ΑΘ αντίστοιχα, δείξτε ότι οι γωνίες $Η\hat{Β}Ε$ και $Θ\hat{Γ}Ζ$ είναι ίσες.



7. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Με διάμετρο τη βάση ΒΓ φέρνουμε ημικύκλιο που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΟ και ΑΔΟ είναι ίσα.

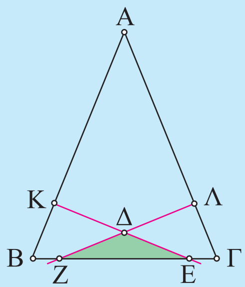


8. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη στην βάση ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Αν οι διχοτόμοι ΒΗ και ΓΘ τέμνουν την ευθεία ε στα Ρ και Σ αντίστοιχα, δείξτε ότι τα τρίγωνα ΣΔΘ και ΕΡΗ είναι ίσα.

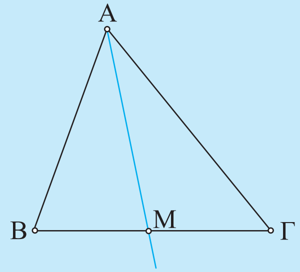


9. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ που τέμνουν τη ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Αν ΑΚ = ΑΛ και οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται μεταξύ τους στο Δ να δείξετε ότι

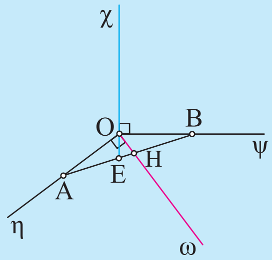
α. ΖΒ = ΓΕ **β.** Το τρίγωνο ΔΕΖ ισοσκελές.



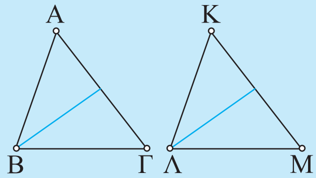
10. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσος. Να δείξετε ότι οι άλλες δυο κορυφές ισαπέχουν από τη διάμεσο ΑΜ.



11. Έστω οι ορθές γωνίες χΟψ και ηΟω με κοινή κορυφή Ο και τα σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οη και Οψ αντίστοιχα έτσι ώστε ΟΑ = ΟΒ.Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τις Οχ και Οω στα Ε και Η αντίστοιχα δείξτε ότι ΟΗ = ΟΕ.

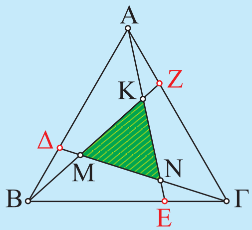


12. Να δείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία και τις διαμέσους μίας εκ των δύο πλευρών ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



13. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ = ΑΖ. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ, ΓΔ και ΑΕ τέμνονται ανα δύο στα Μ,Ν και Κ αντίστοιχα, δείξτε ότι:

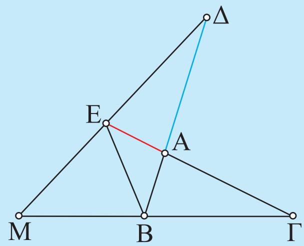
ι. ΑΕ = ΓΔ = ΒΖ **ιι.** το τρίγωνο ΜΝΚ είναι επίσης ισόπλευρο.



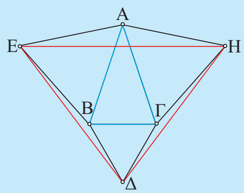
14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Προεκτείνουμε τις ΑΒ και ΑΓ προς το Α και παίρνουμε ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΒ αντίστοιχα. Αν η ΔΕ τέμνει την ΒΓ στο Μ, να δείξετε ότι:

i. $A\hat{E}B = A\hat{B}E$, $A\hat{E}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ και το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές.

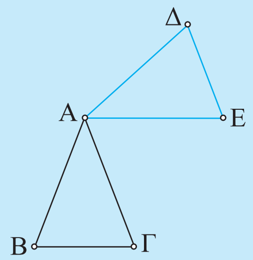
ii. Η διχοτόμος της γωνίας ΕΜΒ διέρχεται από το σημείο Α.



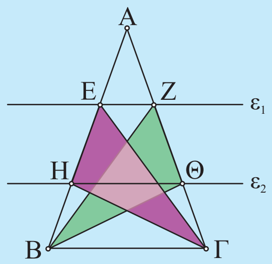
15. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά από αυτό τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΔ και ΑΓΗ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΗ είναι ισοσκελές.



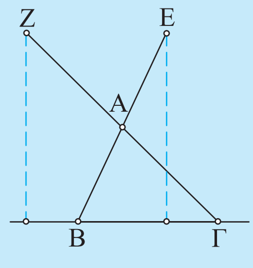
16. Έστω τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με κοινή κορυφή την Α και $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$. Να δείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.



17. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ παράλληλες στη βάση του που τεμνουν την ΑΒ στα Ε και Η και την ΑΓ στα Ζ και Θ αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΖΘ και ΓΕΗ είναι ίσα.



18. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ κατά τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα σημεία Ε και Ζ ισαπέχουν από τη ΒΓ.



19. Αποδείξτε ότι αν ένα τρίγωνο έχει δύο ύψη ίσα μεταξύ τους τότε είναι ισοσκελές και αντίστροφα.

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Στις πλευρές Οχ και Οψ μιας γωνίας παίρνουμε αντίστοιχα ίσα τμήματα ΟΑ = ΟΒ. Στο

εσωτερικό της γωνίας φέρνουμε ημιευθείες Οζ και Οη τέτοιες ώστε $\chi\hat{O}\zeta = \psi\hat{O}\eta$ και $\chi\hat{O}\zeta < \frac{\chi\hat{O}\psi}{2}$. Στις πλευρές Οζ και Οη παίρνουμε αντίστοιχα ίσα τμήματα ΟΜ = ΟΝ. Αν οι ΑΝ και ΒΜ τέμνονται στο Σ να δείξετε ότι:

ι. Τα τρίγωνα ΣΑΜ και ΣΒΝ είναι ίσα.

ιι. Η διχοτόμος της $\chi\hat{O}\psi$ διέρχεται από το Σ.

Μάθημα 4

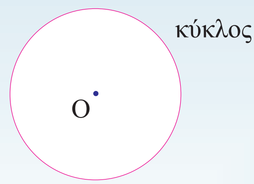
Βασικοί γεωμετρικοί τόποι Ανισοτικές σχέσεις

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

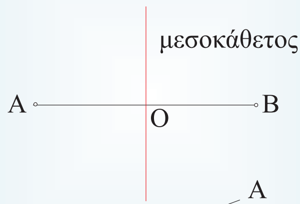
Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

Γεωμετρικός τόπος είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου τα οποία έχουν μια κοινή ιδιότητα. Τρείς από τους βασικότερους γεωμετρικούς τόπους είναι :

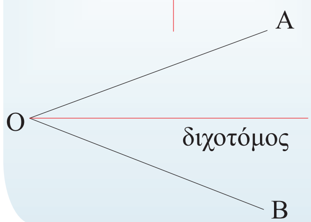
• **Ο κύκλος**
Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από σταθερό σημείο.



• **Η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος**
Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.



• **Η διχοτόμος γωνίας**
Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

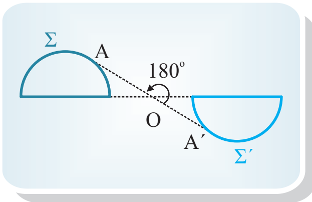


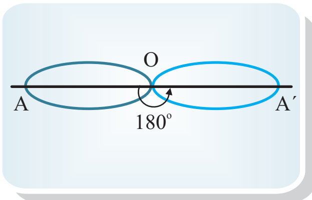
Συμμετρικά σχήματα

Έστω Ο σημείο του επιπέδου. Για κάθε σημείο Α του επιπέδου, διαφορετικό του Ο, υπάρχει ένα μοναδικό σημείο Β τέτοιο ώστε το Ο να είναι μέσο του ΑΒ.
Τα Α και Β λέγονται **συμμετρικά** σημεία ως πρός κέντρο συμμετρίας το Ο και ειδικότερα το Β λέγεται **συμμετρικό** του Α.
Προφανώς και το Α είναι **συμμετρικό** του Β.



Κεντρική συμμετρία.

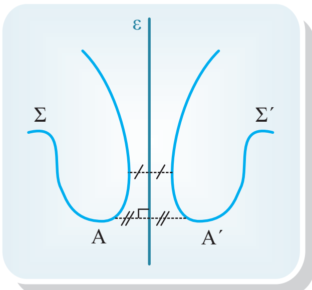


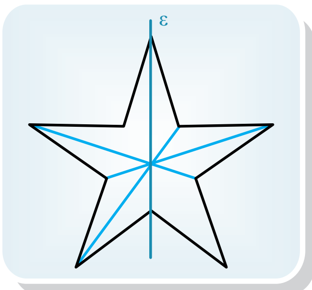


Δύο σχήματα Σ, Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο, αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ΄ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το Ο. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας του σχήματος, που αποτελείται απο τα συμμετρικά ως προς το Ο σχήματα Σ και Σ΄. Δηλαδή ένα σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α΄, ως προς το Ο, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε οτι παρουσιάζει κεντρική συμμετρία.

Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ, με κέντρο συμμετρίας το Ο, κατά 180° γύρω από το Ο, θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.

Αξονική συμμετρία.





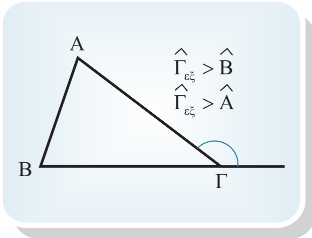
Δύο σχήματα Σ, Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ΄ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε. Η ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ΄. Δηλαδή μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α΄, ως προς την ε, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει αξονική συμμετρία. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε, τότε η ε χωρίζει νοητά το σχήμα σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν “διπλώσουμε το επίπεδο του σχήματος κατά μήκος της ε, τα μέρη αυτα θα ταυτιστούν.

Ανισοτικές σχέσεις

Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας.

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μια από τις απέναντι εσωτερικές.



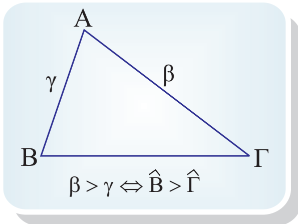
Πορίσματα

• Δύο γωνίες ενός τριγώνου έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°.

• Ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει πάνω από μία ορθή ή αμβλεία γωνία.

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές και αντίστροφα.



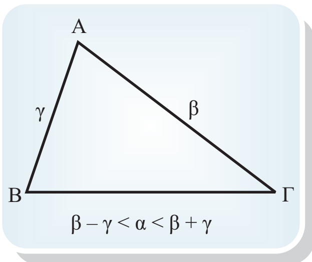
Πορίσματα

• Απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία ενός τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά.

• Ένα τρίγωνο με δύο ίσες γωνίες είναι ισοσκελές και με τρείς ίσες γωνίες είναι ισόπλευρο.

Τριγωνική ανισότητα

Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από την διαφορά των δύο άλλων και μικρότερη από το άθροισμά τους.



Πόρισμα

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση από τη διάμετρο του κύκλου.

Παρατήρηση

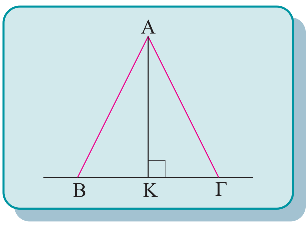
• Η τριγωνική ανισότητα για τυχαία σημεία Α,Β,Γ του επιπέδου εκφράζεται από τη σχέση $|A\Gamma - B\Gamma| \leq AB \leq A\Gamma + B\Gamma$.

• Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.

Κάθετες και πλάγιες ευθείες

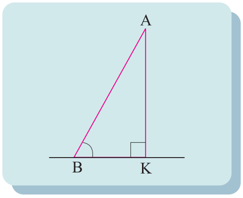
Θεώρημα

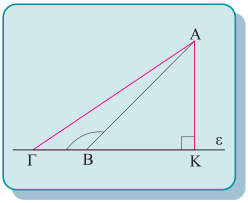
Από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια τμήματα:



• Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα μεταξύ τους τότε

τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.



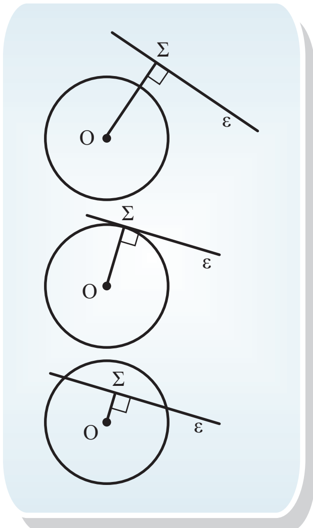


- **Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα μεταξύ τους τότε οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.**

- **Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από οποιοδήποτε πλάγιο τμήμα.**

Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Έστω κύκλος (Ο,ρ) και ΟΣ η απόσταση του σημείου Ο απο την ευθεία ε.



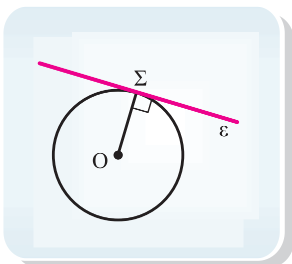
- Αν ισχύει ΟΣ > ρ τότε η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εξωτερική του κύκλου.

- Αν ισχύει ΟΣ = ρ τότε η ευθεία έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εφαπτόμενη του κύκλου και είναι μοναδική για το συγκεκριμένο σημείο επαφής. Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτόμενη.

- Αν ισχύει ΟΣ < ρ τότε η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο και λέγεται τέμνουσα του κύκλου.

Εφαπτομένη κύκλου

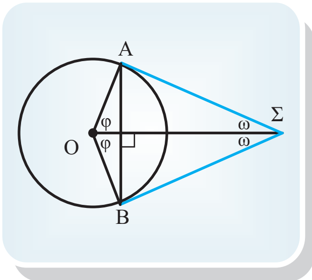
Μια ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο λέγεται εφαπτομένη του κύκλου
Η εφαπτομένη:
- Είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής.
- Σε κάθε σημείο του κύκλου είναι μοναδική.



Θεώρημα
Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

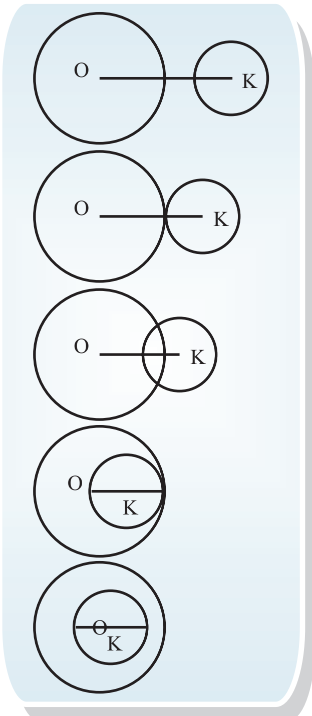
Πόρισμα
Τρια σημεία ενός κύκλου δεν μπορεί να είναι συνευθειακά.

Διακεντρική ευθεία



Διακεντρική ευθεία σημείου Σ λέγεται η ευθεία ΣΟ η οποία διέρχεται από το σημείο Σ και το κέντρο Ο του κύκλου.
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα R, Σ σημείο εκτός του κύκλου και ΣΑ, ΣΒ τα εφαπτόμενα τμήματα από το Σ προς τον κύκλο. Τα τρίγωνα $\Sigma\overset{\Delta}{O}A$ και $\Sigma\overset{\Delta}{O}B$ είναι ίσα, επομενως **τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ, ΣΒ είναι ίσα.**
Τότε η διακεντρική ευθεία:
- είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ
- διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}B$
- διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Sigma}B$

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων



Έστω κύκλοι (Ο, R) και (Κ, ρ) με R > ρ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΟ που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων λέγεται διάκεντρος. Έστω ΚΟ = δ.
- Αν ισχύει $\delta > R + \rho$ τότε οι κύκλοι βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου.
- Αν ισχύει $\delta = R + \rho$ τότε οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο τομής τους με τη διάκεντρο.
- Αν ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$ τότε οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία .
- Αν ισχύει $\delta = R - \rho$ τότε οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο τομής τους με τη διάκεντρο.α .
- Αν ισχύει $R - \rho > \delta$ τότε οι κύκλοι βρίσκονται ο ένας εντός του άλλου.

Γεωμετρικές κατασκευές

Η κατασκευή ενός σχήματος με τη βοήθεια αποκλειστικά του κανόνα και του διαβήτη ονομάζεται **γεωμετρική κατασκευή**. Η διαδικασία που ακολουθείται παρουσιάζεται σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1ο **Η ανάλυση**

Προσδιορίζουμε όλες τις ιδιότητες και τις συνθήκες που ισχύουν στο πρόβλημα που μελετάμε. Όταν η κατασκευή του σχήματος είναι φανερή τότε παραλείπουμε αυτό το βήμα.

Βήμα 2ο **Η κατασκευή**

Περιγράφουμε όλες τις απαραίτητες ενέργειες για την κατασκευή του σχήματος.

Βήμα 3ο **Η απόδειξη**

Επιβεβαιώνουμε ότι το κατασκευασμένο σχήμα πληροί τις συνθήκες και τις ιδιότητες του προβλήματος όπως περιγράφτηκαν στο Βήμα 1ο.

Βήμα 4ο **Η διερεύνηση**

Καταγράφουμε όλες τις αναγκαίες συνθήκες για τις οποίες το πρόβλημα έχει λύση καθώς και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μέθοδος 1

Για τη λύση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Θεωρούμε τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου και προσδιορίζουμε την γραμμή στην οποία βρίσκεται με βάση την χαρακτηριστική του ιδιότητα.
- Κατασκευάζουμε την γραμμή του γεωμετρικού τόπου με κανόνα και διαβήτη.
- Θεωρούμε ένα δεύτερο τυχαίο σημείο της γραμμής που κατασκευάσαμε και αποδεικνύουμε ότι έχει την ίδια χαρακτηριστική ιδιότητα.

Μέθοδος 2

Για να αποδείξουμε μια σχέση ανισότητας μεταξύ δύο γωνιών ή δύο ευθυγράμμων τμημάτων:

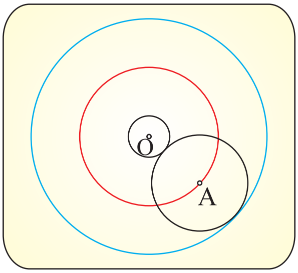
- Αν είναι στοιχεία του ίδιου τριγώνου χρησιμοποιούμε τις ανισοτικές σχέσεις τριγώνων.
- Αν δεν είναι στοιχεία του ίδιου τριγώνου τότε τα εξισώνουμε με κατάλληλα μεγέθη (πλευρές ή γωνίες) ώστε να τα μεταφέρουμε στο ίδιο τρίγωνο και χρησιμοποιούμε τις ανισοτικές σχέσεις τριγώνων.
- Αν δεν μπορεί να γίνει το δεύτερο βήμα τα συγκρίνουμε με ένα τρίτο μέγεθος και με τη μεταβατική ιδιότητα καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων (Κ, 2ρ) που εφάπτονται εξωτερικά με κύκλο (Ο, ρ). Επίσης να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των κύκλων (Κ, 2ρ) που έχουν μέγιστη απόσταση από το Ο.

Λύση



Έστω Α ένα τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου. Τότε επειδή οι κύκλοι (Α,2ρ) και (Ο,ρ) εφάπτονται εξωτερικά ισχύει ΑΟ = 2ρ + ρ = 3ρ. Άρα τα σημεία του γεωμετρικού τόπου ισαπέχουν από το σημείο Ο απόσταση ίση με 3ρ άρα ανήκουν στον κύκλο (Ο,3ρ).

Αντίστροφα έστω τυχαίο σημείο Σ του κύκλου (Ο,3ρ). Με κέντρο το σημείο Σ κατασκευάζουμε κύκλο ακτίνας ίσης με 2ρ και με κέντρο το σημείο Ο κατασκευάζουμε κύκλο ακτίνας ίσης με ρ. Τότε ισχύει ΣΟ = 2ρ + ρ άρα οι κύκλοι (Σ,2ρ) και

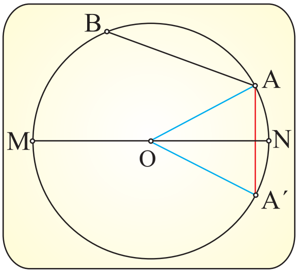
(Ο,ρ) εφάπτονται εξωτερικά.Ομοίως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των κύκλων (Κ,2ρ) που έχουν μέγιστη απόσταση από το Ο είναι ο κύκλος (Ο,5ρ).

Άσκηση 2

Έστω κύκλος (Ο,ρ) και χορδή ΑΒ. Αν ΜΝ είναι μία διάμετρος που δεν τέμνει την ΑΒ δείξτε ότι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς τη διάμετρο είναι επίσης χορδή του κύκλου.

Λύση

Έστω Α΄, Β΄ τα συμμετρικά των Α,Β ως πρός τη διάμετρο ΜΝ. Αρκεί να δείξουμε ότι τα Α΄και Β΄ ανήκουν και αυτά στον κύκλο (Ο,ρ). Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΝΑ και ΟΝΑ΄.



Έχουμε: $\left.\begin{array}{ll} NA = NA' & (\text{απο συμμετρία}) \\ ON & \text{κοινή πλευρά} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\text{τρ.}ONA = \text{τρ.}ONA' \Rightarrow OA = OA' = \rho$$

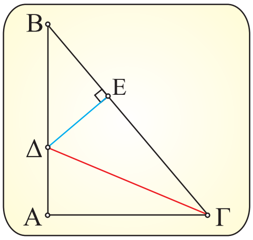
Άρα το Α΄ ανήνει στον κύκλο (Ο,ρ). Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το Β΄ ανήκει επίσης στον κύκλο (Ο,ρ)

Άσκηση 3

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{A} = 90^o\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Δείξτε ότι ΑΔ < ΔΒ.

Λύση

Από το σημείο Δ φέρνουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΓ και ΔΑΓ. Έχουμε:



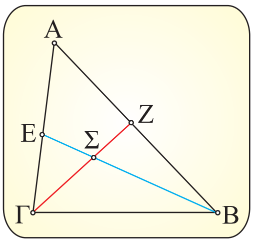
$\left.\begin{array}{ll} \Delta\widehat{\Gamma}E = \Delta\widehat{\Gamma}A & (\Delta\Gamma \text{ διχοτόμος}) \\ \Delta\Gamma & \text{κοινή πλευρά} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\overset{\triangle}{E}\Gamma = \Delta\overset{\triangle}{A}\Gamma \Rightarrow \Delta E = \Delta A \quad (1)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΕ η πλευρα ΒΔ είναι υποτείνουσα άρα ισχύει $B\Delta > \Delta E \overset{(1)}{\Leftrightarrow} B\Delta > \Delta A$

Άσκηση 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ > ΑΓ και οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΖ τέμνονται στο Σ. Να δείξετε ότι ΣΒ > ΣΓ.

Λύση



Έχουμε $AB > A\Gamma \Leftrightarrow \widehat{A\Gamma B} > \widehat{AB\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\widehat{A\Gamma B}}{2} > \dfrac{\widehat{AB\Gamma}}{2} \Leftrightarrow$

$$\widehat{\Sigma\Gamma B} > \widehat{\Sigma B\Gamma} \Leftrightarrow \Sigma B > \Sigma\Gamma$$

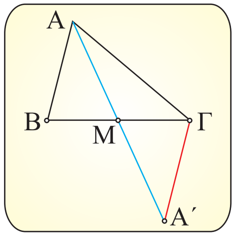
Άσκηση 5

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και ΑΜ διάμεσος αυτού. Να δείξετε ότι:

i. $\widehat{MAB} > \widehat{MA\Gamma}$ **ii.** $\frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$

Λύση

ι. Στην προέκταση της ΑΜ θεωρούμε ΜΑ΄=ΑΜ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑ΄Γ. Έχουμε:



$$\left.\begin{array}{l} M\Gamma = MB \\ MA = MA' \\ \widehat{AMB} = \widehat{A'M\Gamma} \end{array}\right\} \text{Οπότε } M\overset{\triangle}{A}B = M\overset{\triangle}{A'}\Gamma$$

$$\text{και συνεπώς } \left\{\begin{array}{l} M\hat{A}B = M\hat{A'}\Gamma \\ AB = A'\Gamma \end{array}\right.$$

Από υπόθεση $AB < A\Gamma \Leftrightarrow A'\Gamma < A\Gamma \Leftrightarrow M\hat{A}\Gamma < M\hat{A'}\Gamma \Leftrightarrow M\hat{A}\Gamma < M\hat{A}B$

ιι. Στο τρίγωνο ΑΆΓ έχουμε $A\Gamma > A'\Gamma$ και από τριγωνική ανισότητα

$$A\Gamma - A'\Gamma < AA' < A\Gamma + A'\Gamma \Leftrightarrow A\Gamma - AB < 2AM < A\Gamma + AB \Leftrightarrow$$

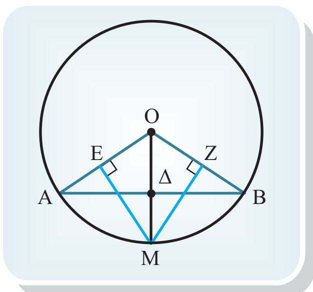
$$\frac{A\Gamma - AB}{2} < AM < \frac{A\Gamma + AB}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$$

Άσκηση 6

Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ισαπέχει από τις ακτίνες που αντιστοιχούν στα άκρα του τόξου και μάλιστα απόσταση ίση με το μισό της αντίστοιχης χορδής.

Λύση

Φέρουμε $ME \perp OA$, $MZ \perp OB$. Θα δείξουμε ότι: $ME = MZ = \frac{AB}{2}$. Η ακτίνα ΟΜ είναι διχοτόμος της $A\hat{O}B$, αφού $A\hat{O}M = B\hat{O}M$, διότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ και σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου αντιστοιχούν ίσες επίκεντρες γωνίες. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $E\overset{\triangle}{O}M$ και $Z\overset{\triangle}{O}M$ είναι ίσα, διότι έχουν:



$OM = OM$ (κοινή)
$E\hat{O}M = Z\hat{O}M$ (το αποδείξαμε παραπάνω).
Συνεπώς $ME = MZ$ (1)

Επειδή το Μ είναι μέσο του $\overset{\frown}{AB}$, ως γνωστόν ισχύει $OM \perp AB$ και αν Δ είναι το σημείο τομής των ΟΜ και ΑΒ, το Δ είναι μέσο του ΑΒ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $O\overset{\Delta}{A}\Delta$, $O\overset{\Delta}{M}E$ έχουν:

$$OA = OM \text{ (ως ακτίνες του κύκλου)}$$

$$A\hat{O}\Delta = E\hat{O}M \text{ (κοινή)}$$

Άρα τα τρίγωνα $O\overset{\Delta}{A}\Delta$ και $O\overset{\Delta}{M}E$ είναι ίσα, οπότε είναι:

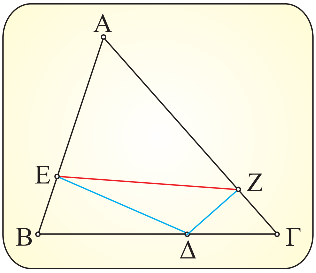
$$ME = A\Delta \Leftrightarrow ME = \frac{AB}{2} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $ME = MZ = \frac{AB}{2}$.

Άσκηση 7

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ τυχαίο σημείο της ΒΓ. Αν Ε,Ζ είναι τα ίχνη των καθέτων από το Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι η ΕΖ είναι μικρότερη από την πλευρά ΒΓ.

Λύση



Στο ορθογώνιο ΔΕΒ η ΒΔ είναι υποτείνουσα άρα $B\Delta > \Delta E \quad (1)$.

Ομοίως στο ορθογώνιο ΔΖΓ η ΓΔ είναι υποτείνουσα άρα $\Gamma\Delta > \Delta Z \quad (2)$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε :

$B\Delta + \Gamma\Delta > \Delta E + \Delta Z \Leftrightarrow B\Gamma > \Delta E + \Delta Z \quad (3)$

Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΔΕΖ ισχύει:

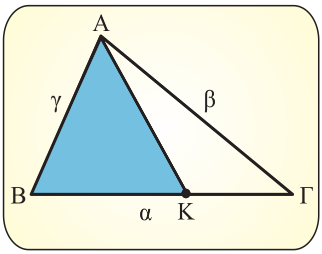
$\Delta E + \Delta Z > EZ \quad (4)$

Αρα $(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} B\Gamma > EZ$

Άσκηση 8

Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ της πλευράς ΒΓ. Να δείξετε ότι: $\tau - \alpha < AK < \tau$.

Λύση



Από τα τρίγωνα $A\overset{\Delta}{B}K$, $A\overset{\Delta}{\Gamma}K$, έχουμε:

- $AB < BK + AK \quad (1)$
- $A\Gamma < \Gamma K + AK \quad (2)$

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$AB + A\Gamma < (BK + \Gamma K) + 2AK \Leftrightarrow \gamma + \beta < \alpha + 2AK \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\gamma+\beta)-\alpha < 2AK \Leftrightarrow 2\tau-\alpha-\alpha < 2AK \Leftrightarrow 2\tau-2\alpha < 2AK \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(\tau-\alpha) < 2AK \Leftrightarrow \tau-\alpha < AK \quad (3)$

Επίσης από τα ίδια τρίγωνα έχουμε:

• $AK < AB + BK \quad (4)$

• $AK < A\Gamma + K\Gamma \quad (5)$

Προσθέτουμε τις (4), (5) κατά μέλη και έχουμε:

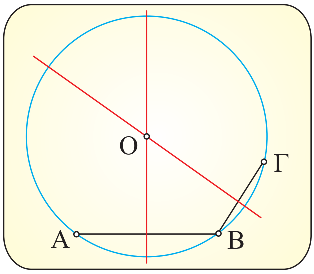
$2AK < AB + A\Gamma + (BK + K\Gamma) \Leftrightarrow 2AK < \gamma+\beta+\alpha \Leftrightarrow 2AK < 2\cdot\tau \Leftrightarrow AK < \tau \quad (6)$

Από (3) και (6) έχουμε: $\tau - \alpha < AK < \tau$

Άσκηση 9

Πάνω σε χαρτί χαράζουμε ένα κύκλο με τη βοήθεια ενός νομίσματος. Να βρείτε το κέντρο του κύκλου.

Λύση



Αναζητούμε το κέντρο ενός κύκλου. Επειδή από τρία μη συνευθειακά σημεία σημεία του επιπέδου διέρχεται μοναδικός κύκλος αρκεί να βρούμε ένα σημείο που να ισαπέχει από τρία σημεία του κύκλου.

Φέρνουμε τις διαδοχικές χορδές ΑΒ και ΒΓ. Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο της χορδήςΑΒ και τη μεσοκάθετο της χορδής ΒΓ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο που είναι και το ζητούμενο σημείο.

Πράγματι το σημείο Ο ανήκει στην μεσοκάθετο της χορδής ΑΒ οπότε ΟΑ = ΟΒ και στην μεσοκάθετο της χορδής ΒΓ οπότε ΟΒ = ΟΓ.

Δηλαδή ισχύει ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ.

Το σημείο Ο υπάρχει διότι διαφορετικά οι μεσοκάθετοι θα ήταν παράλληλοι άρα τα Α, Β, Γ θα ήταν συνευθειακά (που είναι άτοπο). Επίσης το σημείο Ο είναι μοναδικό σαν σημείο τομής δύο ευθειών.

Σημείωση: Η γεωμετρική κατασκευή της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος θεωρήθηκε δεδομένη.

Άσκηση 10

Έστω δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) με R > ρ, που δεν τέμνονται. Φέρουμε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες τους. Να δείξετε ότι:

α. τέμνονται σε σημείο της διακέντρου.

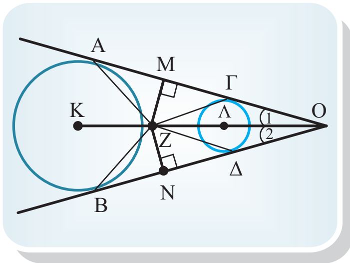
β. οι μεσοκάθετοι των κοινών εξωτερικών εφαπτόμενων τμημάτων τέμνονται σε σημείο της διακέντρου.

Λύση

α. Στον (K, R) η διάκεντρος ΟΚ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}B$ των εφαπτομένων τμημάτων.

Ομοίως στον (Λ, ρ) η ΟΛ διχοτομεί την $\Gamma\hat{O}\Delta$. Επειδή όμως η διχοτόμος γωνίας είναι μοναδική, συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες ΟΚ και ΟΛ ταυτίζονται. Άρα το Ο ανήκει στην διάκεντρο ΚΛ.

β. Έστω Ζ το σημείο τομής της διακέντρου ΚΛ και της μεσοκαθέτου του ΑΓ. Τότε ΑΖ = ΖΓ (1).
Αρκεί να δείξουμε ότι το Ζ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΔ, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι: ΖΒ = ΖΔ.



Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{Z O \Gamma}$ και $\overset{\Delta}{Z O \Delta}$ έχουν:
- ΟΖ = ΟΖ (κοινή)
- ΟΓ = ΟΔ (εφαπτόμενα τμήματα)
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (ΟΛ διχοτόμος της $\Gamma\hat{O}\Delta$)

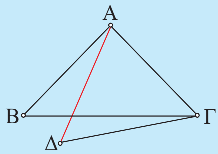
Άρα $\overset{\Delta}{Z O \Gamma} = \overset{\Delta}{Z O \Delta}$ (ΠΓΠ), οπότε: ΖΓ = ΖΔ (2)

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\overset{\Delta}{Z O A} = \overset{\Delta}{Z O B}$, οπότε ΖΑ = ΖΒ (3)
Η (1) δια μέσου των (2) (3) γίνεται ΖΒ = ΖΔ.

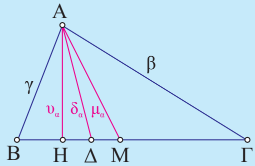
Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. α. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με ΑΓ = ΑΔ. Να δείξετε ότι τα σημεία Β,Γ και Δ δεν είναι συνευθειακά.

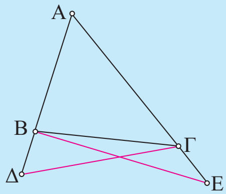
β. Να βρεθεί το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ.



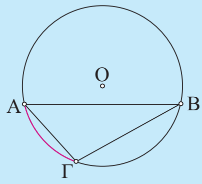
2. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δειχθεί ότι: $\upsilon_\alpha \le \delta_\alpha \le \mu_\alpha$



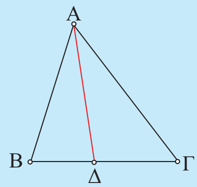
3. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Να αποδειχθεί ότι ΒΕ > ΓΔ.



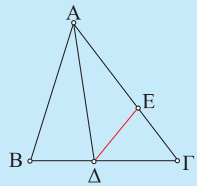
4. Σε κύκλο (Ο,ρ) η χορδή ΑΒ είναι διπλάσια μιας χορδής ΑΓ. Δείξτε ότι το κυρτογώνιο τόξο ΑΒ είναι μεγαλύτερο του διπλάσιου του κυρτογώνιου τόξου ΑΓ.



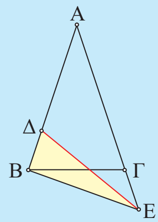
5. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, είναι ΑΒ < ΑΓ. Αν η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας Α, να δειχθεί ότι ΒΔ < ΓΔ.



6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, είναι $\hat{B} < 90^{o}$ και ΑΓ = 2ΑΒ. Να αποδειχθεί ότι $\hat{\Gamma} < \hat{A}/2$.



7. Στην πλευρά ΑΒ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ και στην προέκταση της ΑΓ το τμήμα ΓΕ = ΒΔ. Να δειχθεί ότι ΔΕ > ΒΓ.

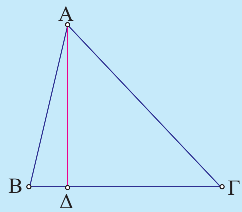


8. Στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ. Να δειχθεί ότι:

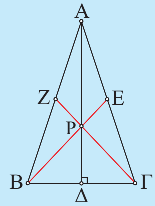
α. $A\Delta < \dfrac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

β. $A\Delta > \dfrac{AB + A\Gamma - B\Gamma}{2}$ **γ.** $A\Delta < AB + A\Gamma$

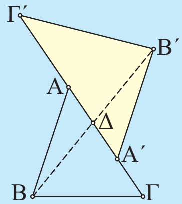
9. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών Α των τριγώνων ΑΒΓ με σταθερή πλευρά ΒΓ και με ύψος υ_α γνωστού μήκους.



10. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και πάνω στο ύψος ΑΔ τυχαίο σημείο Ρ. Αν οι ΒΡ και ΓΡ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα Ε και Ζ αντίστοιχα να δείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.



11. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ. Αποδείξτε ότι το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς Δ είναι τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ.



12. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = α και ΒΓ > α. Για τυχαίο εσωτερικό σημείο Σ του τριγώνου δείξτε ότι $\mathrm{B\hat{\Sigma}\Gamma > \Sigma\hat{B}\Gamma}$ και $\mathrm{B\hat{\Sigma}\Gamma > \Sigma\hat{\Gamma}B}$.

13. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και μ_α η διάμεσος της κορυφής Α. Να δείξετε ότι:

ι) $\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$ **ιι)** $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha+\beta+\gamma$

14. Έστω κύκλοι (Κ,ρ) και (Ο,R) οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α.
ι. Υπάρχει κύκλος που εφάπτεται εξωτερικά στους δύο προηγούμενους και έχει το κέντρο του πάνω στην κοινή τους εφαπτόμενη;
ιι. Η διάκεντρος και οι κοινές τους εφαπτόμενες διέρχονται από το ίδιο σημείο; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

15. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και ΑΜ διάμεσος. Να δείξετε ότι:
ι. Αν Σ τυχαίο σημείο της ΑΜ τότε ΣΓ > ΣΒ.
ιι. Ισχύει $\mathrm{B\hat{A}M > M\hat{A}\Gamma}$
ιιι. Η γωνία $\mathrm{A\widehat{M}\Gamma}$ είναι αμβλεία.

16. Ένας γεωργός θέλει να περιφράξει με συρματόπλεγμα ένα χωράφι τριγωνικού σχήματος. Καθώς βρισκόταν μέσα στο χωράφι είπε στο γιο του: “Από τη μία κορυφή απέχουμε 40m και από τις άλλες δύο 60m. Μην αγοράσεις πάνω από 320m συρματόπλεγμα.” Πως ήξερε ότι θα ήταν αρκετό;

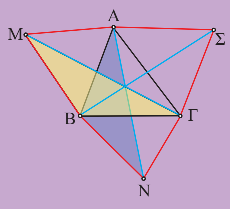
Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη υ_α , υ_β και υ_γ . Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha+\beta+\gamma$$

5ο μάθημα

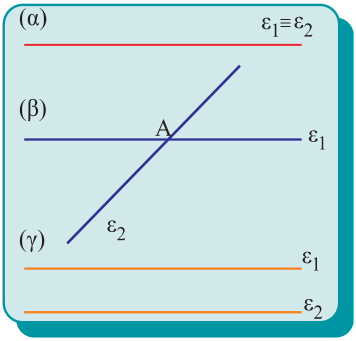
Κάθετες και παράλληλες ευθείες



4ο Κεφάλαιο

Μάθημα 5 Κάθετες και παράλληλες ευθείες

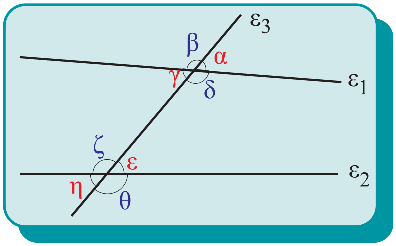
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ



Σχετικές θέσεις δύο ευθειών.

Οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 του ίδιου επιπέδου είναι οι παρακάτω:

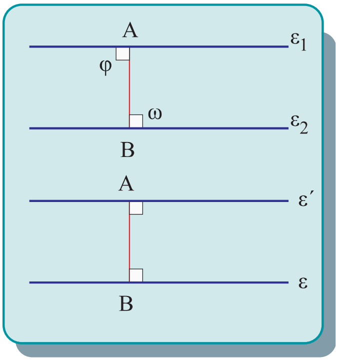
- Ταυτίζονται (άπειρα κοινά σημεία). Συμβολίζουμε $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$.
- Τέμνονται (ένα κοινό σημείο).
- Δεν τέμνονται (κανένα κοινό σημείο). Στην περίπτωση αυτή οι ευθείες ονομάζονται **παράλληλες** και συμβολίζουμε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



Τέμνουσα δύο ευθειών.

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου οι οποίες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε_3. Τότε σχηματίζονται τα εξής ζεύγη γωνιών:

- **Γωνίες εντός εναλλάξ.** Είναι γωνίες που βρίσκονται εντός της ζώνης που δημιουργούν οι ευθείες ε_1 και ε_2 και σε διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία ε_3. Τέτοιες είναι οι γ ,ε και δ,ζ.
- **Γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη.** Είναι γωνίες που βρίσκονται εντός των ευθειών ε_1 και ε_2 και στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ε_3. Τέτοιες είναι οι δ,ε και γ,ζ.
- **Γωνίες εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.** Είναι γωνίες που βρίσκονται μια εντός και μία εκτός των ευθειών ε_1 και ε_2 και στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ε_3. Τέτοιες είναι οι α,ε και β,ζ και δ,θ και η,γ.



Πορίσματα

- Δύο ευθείες κάθετες σε διαφορετικά σημεία στην ίδια ευθεία, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
- Δύο ευθείες παράλληλες στην ίδια ευθεία, είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
- Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία τέμνει μία από αυτές τότε τέμνει και την άλλη.

• Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία τέμνει κάθετα μία από αυτές τότε τέμνει κάθετα και την άλλη.

Το Ευκλείδειο Αίτημα της Παραλληλίας.

Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς την ευθεία.

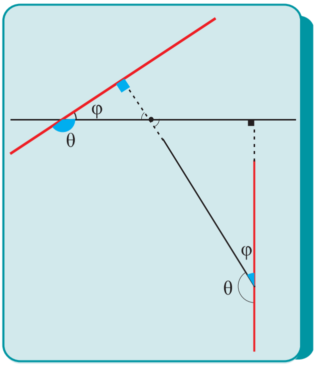
Πρόταση

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μία τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες.

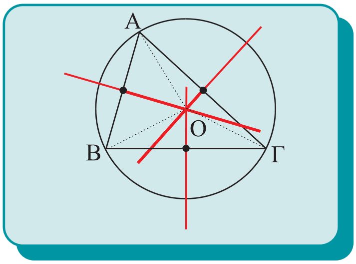
Αν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες ή κάθετες μία προς μία τότε

- Αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες τότε είναι **ίσες**.
- Αν η μία είναι οξεία και ή άλλη αμβλεία τότε είναι **παραπληρωματικές**.



Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου.

- Ο κύκλος που διέρχεται από τις τρείς κορυφές ενός τριγώνου λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται και οι τρείς μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου και λέγεται **περίκεντρο.**
- Ο κύκλος που εφάπτεται στις τρείς πλευρές ενός τριγώνου λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται και οι τρείς διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου και λέγεται **έκκεντρο.**



- Ο κύκλος που εφάπτεται στη μία πλευρά ενός τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων λέγεται **παρεγγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται η διχοτόμος της απέναντι γωνίας και οι διχοτόμοι των άλλων δύο εξωτερικών γωνιών του τριγώνου και λέγεται **παράκεντρο.**

Άθροισμα γωνιών τριγώνου και κυρτού ν - γώνου.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές.

Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν - γώνου ισούται με (2ν – 4) ορθές.

Πορίσματα

- Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες μία προς μία ίσες, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
- Οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
- Κάθε γωνία ενός ισόπλευρου τριγώνου ισούται με 60°.
- Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν - γώνου ισούται με 4 ορθές.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μέθοδος 1

1. Για να δείξουμε ότι δυο ευθείες είναι παράλληλες:

- Δείχνουμε ότι είναι κάθετες σε τρίτη ευθεία.
- Δείχνουμε ότι είναι παράλληλες σε τρίτη ευθεία.
- Δείχνουμε ότι με μία τρίτη τέμνουσα σχηματίζουν:
  ι. δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες
  ιι. δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες
  ιιι. δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Μέθοδος 2

2. Για να δείξουμε ότι δυο ευθείες τέμνονται:

- Δείχνουμε ότι μια τρίτη ευθεία παράλληλη σε μία από τις δύο, τέμνει την άλλη.
- Δείχνουμε ότι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες έχουν άθροισμα διαφορετικό από 2 ορθές.

Μέθοδος 3

3. Για να δείξουμε ότι δυο ευθείες τέμνονται κάθετα:

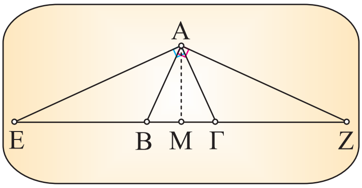
- Δείχνουμε ότι σχηματίζουν ορθή γωνία.
- Δείχνουμε ότι είναι διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών.
- Δείχνουμε ότι η μία είναι παράλληλη και η άλλη είναι κάθετη σε τρίτη ευθεία.
- Δείχνουμε ότι μία είναι βάση ισοσκελούς τριγώνου και η άλλη είναι η αντίστοιχη διάμεσος ή διχοτόμος.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, η κάθετη στο Α στην ΑΒ, τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ζ και η κάθετη στο Α στην ΑΓ, την τέμνει στο Ε. Να αποδειχθεί ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι και μεσοκάθετη του τμήματος ΕΖ.

Λύση

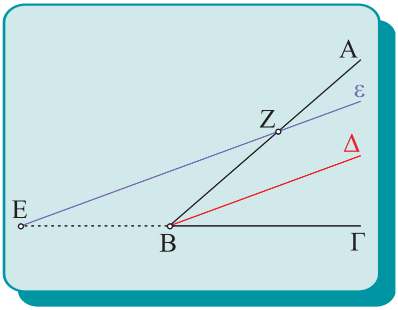


Φέρνουμε την μεσοκάθετη ΑΜ της ΒΓ. Το ΑΜ είναι ύψος, διάμεσος, άρα και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Επομένως $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (συμπληρώματα των ίσων γωνιών A_1 και A_2). Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ίσα διότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$, $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (παραπληρωματικές

των $\hat{B} = \hat{\Gamma}$). Άρα $AE = AZ$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΑΖ, είναι ΑΜ διχοτόμος της $E\hat{A}Z$, άρα και μεσοκάθετος της ΕΖ.

Άσκηση 2

Έστω γωνία $A\hat{B}\Gamma$ και ευθεία ε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει τις πλευρές στα σημεία Ζ και Ε. Να δείξετε ότι $B\hat{Z}E = Z\hat{E}B$.



Λύση

Έχουμε $Z\hat{E}B = \Gamma\hat{B}\Delta = \frac{1}{2}A\hat{B}\Gamma$ (1) (ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη των ευθειών ε και ΒΔ). Επίσης

$B\hat{Z}E = A\hat{B}\Delta = \frac{1}{2}A\hat{B}\Gamma$ (2)

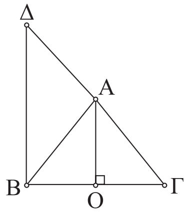
(ως εντός εναλλάξ των ευθειών ε και ΒΔ). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $B\hat{Z}E = Z\hat{E}B$.

Άσκηση 3

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΟ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$. Από το Β φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο, που τέμνει την ευθεία ΓΑ στο Δ. Να δειχθεί ότι:

α. Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές

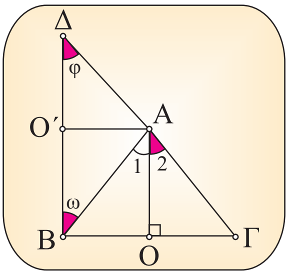
β. Αν είναι και ΑΒ = ΑΓ, τότε $\Delta B \perp B\Gamma$.



Λύση

α. Είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΟ διχοτόμος). Επειδή $B\Delta \parallel AO$ είναι $\hat{\omega} = \hat{A}_1$ και $\hat{\varphi} = \hat{A}_2$. Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$, συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

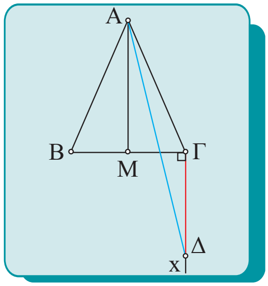
β. Φέρνουμε το ύψος ΑΟ΄ του τριγώνου ΑΒΔ. Το ΑΟ΄ είναι διχοτόμος της $\Delta\hat{A}B$. Άρα $AO' \perp AO$ $\left(O\hat{A}O' = 90^o\right)$. Επειδή $AO \perp B\Gamma$ είναι και $\Delta B \perp B\Gamma$ (επειδή $\Delta B \parallel AO$).



Άσκηση 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και η διάμεσος ΑΜ. Φέρνουμε $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτή τμήμα ΓΔ = ΑΒ. Να δείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$.

Λύση



Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές η διάμεσος ΑΜ είναι και ύψος.

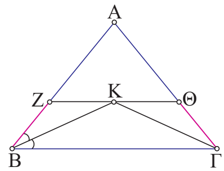
Άρα $\left.\begin{matrix} AM \perp B\Gamma \\ \Gamma\Delta \perp B\Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM // \Gamma\Delta \Rightarrow \hat{\Delta} = M\hat{A}\Delta \quad (1)$

Επίσης $A\Gamma = AB = \Gamma\Delta$ (από υπόθεση) άρα $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\Delta}$ (2)

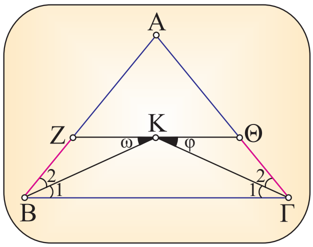
Από (1) και (2) παίρνουμε $M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της $M\hat{A}\Gamma$

Άσκηση 5

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Κ το σημείο, που τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ. Από το Κ φέρνουμε τη ΖΘ παράλληλη στη ΒΓ. Να δειχθεί ότι ΖΘ = ΒΖ + ΓΘ.



Λύση



Είναι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Επειδή $Z\Theta \parallel B\Gamma$ είναι $\hat{B}_1 = \hat{\omega}$.

Άρα $\hat{B}_2 = \hat{\omega}$, οπότε $ZK = BZ\ (1)$.

Όμοια είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$. Επειδή $Z\Theta \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = \hat{\varphi}$.

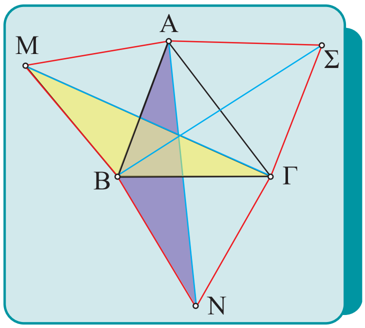
Άρα $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\varphi}$, οπότε $K\Theta = \Gamma\Theta\ (2)$.

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $ZK + K\Theta = BZ + \Gamma\Theta \Leftrightarrow Z\Theta = BZ + \Gamma\Theta$.

Άσκηση 6

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά ισόπλευρα τρίγωνα ΜΑΒ, ΝΒΓ και ΣΑΓ. Να δείξετε ότι ΜΓ=ΝΑ=ΣΒ.

Λύση



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΑΒΝ και έχουμε

$$\left.\begin{matrix} MB = AB \text{ (πλευρές ισόπλευρου)} \\ NB = \Gamma B \text{ (πλευρές ισόπλευρου)} \\ M\hat{B}\Gamma = 60^\circ + A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}N \end{matrix}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

$$M\overset{\triangle}{B}\Gamma = A\overset{\triangle}{B}N \Rightarrow M\Gamma = AN \quad (1)$$

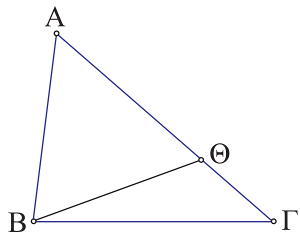
Ομοίως συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΓΝ και ΣΒΓ και έχουμε

$$\left.\begin{matrix} A\Gamma = \Sigma\Gamma \text{ (πλευρές ισόπλευρου)} \\ N\Gamma = \Gamma B \text{ (πλευρές ισόπλευρου)} \\ B\hat{\Gamma}\Sigma = 60^\circ + A\hat{\Gamma}B = N\hat{\Gamma}B \end{matrix}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} A\overset{\triangle}{N}\Gamma = B\overset{\triangle}{\Sigma}\Gamma \Rightarrow \Sigma B = AN \quad (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε $M\Gamma = NA = \Sigma B$

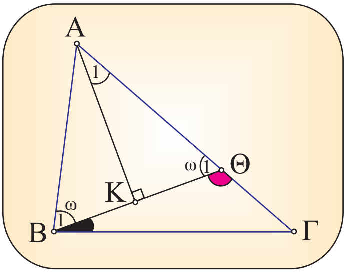
Άσκηση 7

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΓ > ΑΒ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΑΘ = ΑΒ. Να δειχθεί ότι:



α. $B\hat{\Theta}\Gamma = 90^o + \dfrac{\hat{A}}{2}$ **β.** $\Theta\hat{B}\Gamma = \dfrac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

Λύση



Φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΚ. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΘ είναι ισοσκελές έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Theta}_1 = \hat{\omega}$ και $A\hat{K}\Theta = 90^o$. Είναι $B\hat{\Theta}\Gamma = \hat{A}_1 + A\hat{K}\Theta = 90^o + \dfrac{\hat{A}}{2}$ (εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΚΘ). Είναι $\Theta\hat{B}\Gamma + \hat{\omega} = \hat{B}$. Άρα $\Theta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \hat{\omega}$ και $\hat{\Theta}_1 = \hat{\omega} = \Theta\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma}$. Επομένως $\Theta\hat{B}\Gamma = \hat{\omega} - \hat{\Gamma}$. Άρα $2\cdot\Theta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \hat{\Gamma}$. Άρα $\Theta\hat{B}\Gamma = \left(\hat{B}-\hat{\Gamma}\right)/2$.

Άσκηση 8

Η γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με τα 3/4 μιας άλλης γωνίας του. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες του τριγώνου.

Λύση

Η ζητούμενη γωνία είναι μία από τις οξείες γωνίες του τριγώνου διαφορετικά αν ήταν η ορθή τότε θα ήταν μικρότερη από μία οξεία γωνία (άτοπο). Έστω θ η άλλη οξεία γωνία. Τότε:

1η περίπτωση:

Αν $\hat{\omega} = \dfrac{3}{4}$ της ορθής. Τότε $\hat{\omega} = \dfrac{3}{4}\cdot 90^0 = 67,5^0$ και $\hat{\theta} = 90 - \hat{\omega} = 22,5^o$

2η περίπτωση:

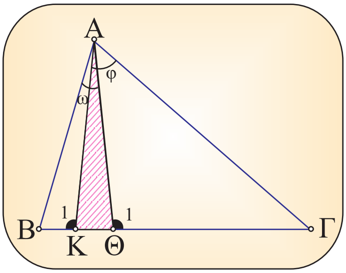
Αν $\hat{\omega} = \dfrac{3}{4}$ της γωνίας θ.

Τότε $\left.\begin{array}{l}\hat{\omega} = \dfrac{3}{4}\hat{\theta} \\ \hat{\omega} + \hat{\theta} = 90^0\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{3}{4}\hat{\theta} + \hat{\theta} = 90^0 \Leftrightarrow \dfrac{7}{4}\hat{\theta} = 90^0 \Leftrightarrow \hat{\theta} \approx 51,4^0$ και $\hat{\omega} \approx 90 - 51,4^0 = 38,6^o$.

Άσκηση 9

Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε από τη κορυφή Α μέχρι τη ΒΓ τα τμήματα ΑΘ, ώστε $B\hat{A}\Theta = \hat{\Gamma}$ και ΑΚ, ώστε $\Gamma\hat{A}K = \hat{B}$ (τα Θ, Κ σημεία της ΒΓ μεταξύ των Β και Γ). Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ΑΘΚ.

Λύση



Είναι η $\hat{\Theta}_1$ εξωτερική στο τρίγωνο ΑΘΒ,

άρα $\hat{\Theta}_1 = \hat{B} + \hat{\omega} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ και

η $\hat{K}_1$ εξωτερική στο τρίγωνο ΑΚΓ,

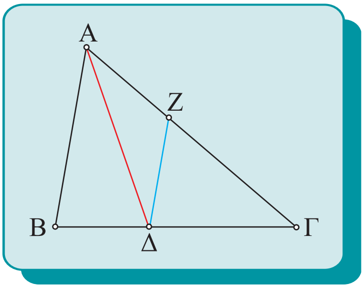
άρα $\hat{K}_1 = \hat{\Gamma} + \hat{\varphi} = \hat{\Gamma} + \hat{B}$.

Συνεπώς $\hat{\Theta}_1 = \hat{K}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Άρα το τρίγωνο ΘΑΚ είναι ισοσκελές ($\hat{\Theta} = \hat{K}$, παραπληρωματικές ίσων γωνιών).

Άσκηση 10

Στο διπλανό σχήμα είναι $\widehat{A} = 80^o$, ΑΔ διχοτόμος, $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} + 30^o$ και ΔΖ//ΑΒ. Να υπολογιστούν οι γωνίες $A\hat{\Delta}Z$ και $Z\hat{\Delta}\Gamma$.

Λύση



Έχουμε $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 80^o + \widehat{\Gamma} + 30 + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} = 70^0 \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 35^o$

Άρα $\widehat{B} = 35^o + 30^o = 65^o$ και

$$B\widehat{\Delta}A = 180^o - (\widehat{B} + B\widehat{A}\Delta) = 180^o - (65^o + \frac{80^o}{2}) = 75^o$$

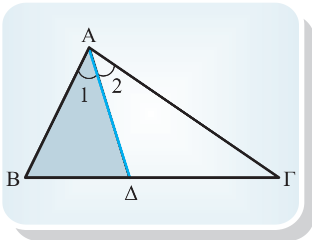
Τότε $A\widehat{\Delta}Z = \Delta\widehat{A}B = \dfrac{80^o}{2} = 40^o$ ως εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΔΖ και

$$Z\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o - (A\widehat{\Delta}Z + A\widehat{\Delta}B) = 180^o - (40^o + 75^o) = 65^o \cdot$$

Άσκηση 11

Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{B}-\hat{\Gamma}=30^o$, φέρουμε την διχοτόμο ΑΔ. Να δείξετε ότι $A\hat{\Delta}B=75^o$.

Λύση



Από το $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ έχουμε:

$$A\hat{\Delta}B=180^o-\hat{A}_1-\hat{B}=180^o-\frac{\hat{A}}{2}-\hat{B}=\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}-\frac{\hat{A}}{2}-\hat{B}=$$

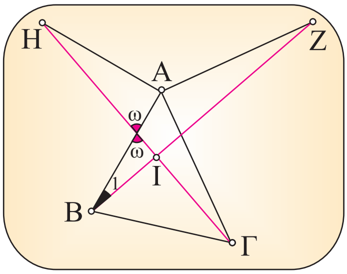
$$=\frac{\hat{A}}{2}+\hat{\Gamma}=\frac{\hat{A}+2\hat{\Gamma}}{2}=\frac{180^o-\hat{B}-\hat{\Gamma}+2\hat{\Gamma}}{2}=\frac{180^o-\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}=$$

$$=\frac{180^o-(\hat{B}-\hat{\Gamma})}{2}=\frac{180^o-30^o}{2}=75^o$$

Άσκηση 12

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε εκτός τις $AH\perp AB$, ώστε ΑΗ = ΑΒ και $AZ\perp A\Gamma$, ώστε ΑΖ = ΑΓ. Να αποδειχθεί ότι τα τμήματα ΓΗ, ΒΖ, είναι ίσα και κάθετα μεταξύ τους.

Λύση



Είναι τρίγ. ΑΗΓ = τρίγ. ΑΖΒ (ΑΗ = ΑΒ, ΑΓ = ΑΖ και $H\hat{A}\Gamma=\Gamma\hat{A}B=90^o+\hat{A}$). Άρα ΓΗ = ΒΖ και $\hat{H}=\hat{B}_1$.

Επειδή $HA\perp AB\Leftrightarrow\hat{H}+\hat{\omega}=90^o\Leftrightarrow\hat{B}_1+\hat{\omega}=90^o$.

Επομένως $\hat{I}=90^o$, οπότε ΓΗ και ΒΖ είναι κάθετες.

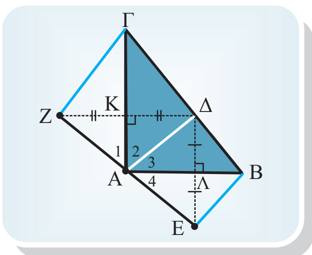
Άσκηση 13

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ προς την υποτείνουσα ΒΓ. Έστω Ε, Ζ τα συμμετρικά του Δ ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α. τα σημεία Ε, Α, Ζ είναι συνευθειακά.

β. ΒΕ//ΓΖ

Λύση



α. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{A\Delta Z}$ είναι ισοσκελές, αφού η ΑΚ είναι ύψος

και διάμεσος. Άρα ΑΔ = ΑΖ. Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΑΔ = ΑΕ. Στα ισοσκελή τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta Z}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ οι ΑΚ , ΑΛ αντίστοιχα θα είναι και διχοτόμοι, οπότε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$.

Τότε $Z\hat{A}E = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = \hat{A}_2 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_3 = 2\cdot\hat{A}_2 + 2\cdot\hat{A}_3 =$

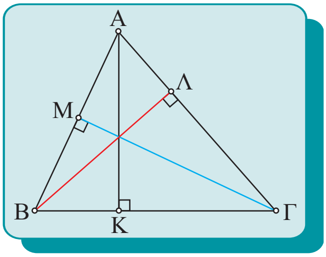
$= 2\left(\hat{A}_2 + \hat{A}_3\right) = 2\cdot\hat{A} = 2\cdot 90^o = 180^o$

Συνεπώς τα Ζ, Α, Ε είναι συνευθειακά σημεία.

β. Είναι $A\hat{E}B = A\hat{\Delta}B = 90^o$ σαν συμμετρικές γωνίες ως προς ΑΒ, οπότε $BE \perp AE$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\Gamma Z \perp AZ$. Όμως τα ΑΕ και ΑΖ έχουν κοινό φορέα. Άρα ΒΕ//ΓΖ σαν κάθετα στην ίδια ευθεία.

Άσκηση 14

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΚ,ΒΛ και ΓΜ. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\mathrm{AK + B\Lambda + \Gamma M < AB + A\Gamma + B\Gamma}$.



Λύση

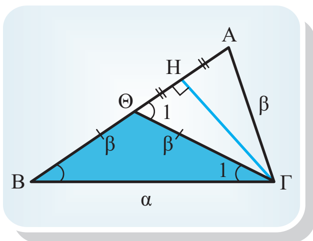
Επειδή $AK \perp B\Gamma$ έχουμε $AK < AB$ (1)
Για τον ίδιο λόγο $B\Lambda < B\Gamma$ (2) και $\Gamma M < A\Gamma$ (3)
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) και (3) παίρνουμε:
$AK + B\Lambda + \Gamma M < AB + A\Gamma + B\Gamma$

Άσκηση 15

Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\hat{A} = 2\hat{B}$, να δείξετε ότι $\alpha < 2\beta$

Λύση

Φέρουμε $\Gamma H \perp AB$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΗ παίρνουμε τμήμα ΗΘ = ΗΑ. Τότε το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{\Gamma A\Theta}}$ είναι ισοσκελές αφού το ΓΗ είναι ύψος και διάμεσος. Άρα $\hat{\Theta}_1 = \hat{A}$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, και $\Gamma\Theta = A\Gamma = \beta$. Όμως η $\hat{\Theta}_1$ είναι εξωτερική γωνία του $\overset{\Delta}{\mathrm{\Theta B\Gamma}}$, οπότε:

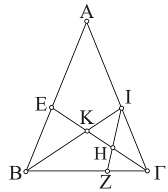


$\hat{\Theta}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow 2\hat{B} = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}_1$, δηλα-

δή το $\overset{\Delta}{\Theta B \Gamma}$ είναι ισοσκελές με κορυφή Θ, αφού οι προσκείμενες γωνίες στην ΒΓ είναι ίσες. Άρα ΘΒ = ΘΓ = β.

Εφαρμόζουμε την τριγ. ανισότητα στο $\overset{\Delta}{\Theta B \Gamma}$ και έχουμε:

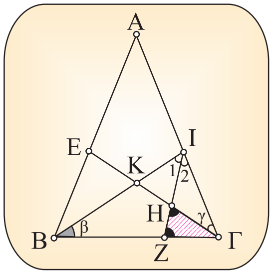
$B\Gamma < \Theta B + \Theta\Gamma \Leftrightarrow \alpha < \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha < 2\beta$



Άσκηση 16

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), φέρουμε τις διχοτόμους ΒΙ και ΓΕ και τη διχοτόμο ΙΖ της γωνίας ΒΙΓ. Να δειχθεί ότι ΓΖ = ΓΗ.

Λύση

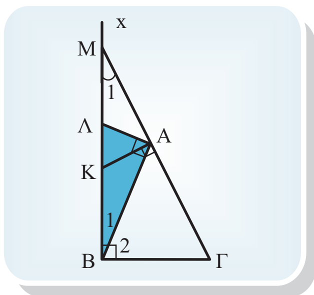


Στο τρίγωνο ΙΗΓ η εξωτερική γωνία Η είναι: $\hat{H} = \hat{I}_2 + \hat{\gamma}$ (1). Στο τρίγωνο ΒΙΖ η εξωτερική γωνία Ζ είναι: $\hat{Z} = \hat{I}_1 + \hat{\beta}$ (2). Επειδή $\hat{\gamma} = \hat{\beta}$ (μισά των ίσων γωνιών Β και Γ) και $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ είναι $\hat{H} = \hat{Z}$, οπότε $\Gamma Z = \Gamma H$.

Άσκηση 17

Σε ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}(AB = A\Gamma)$ φέρουμε ημιευθεία $Bx \perp B\Gamma$, η οποία βρίσκεται στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α). Αν η Βx τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Μ και επί της ΒΜ πάρουμε σημεία Κ, Λ τέτοια ώστε: $B\hat{A}\Lambda = \Gamma\hat{A}K = 90^o$, να δείξετε ότι ΒΛ = ΚΜ και ότι το $\overset{\Delta}{AK\Lambda}$ είναι ισοσκελές.

Λύση



Επειδή $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισοσκελές είναι $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΒΓ. Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Gamma M}(\Gamma\hat{B}M = 90^o)$ έχουμε:

$\hat{\Gamma} + \hat{M}_1 = 90^o \Leftrightarrow \hat{B}_2 + \hat{M}_1 = \Gamma\hat{B}M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{B}_2 + \hat{M}_1 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \Leftrightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_1$

Άρα το $\overset{\Delta}{ABM}$ είναι ισοσκελές με βάση ΜΒ, αφού οι προσκείμενες σ' αυτή γωνίες είναι ίσες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Lambda}(B\hat{A}\Lambda = 90^o)$ και $\overset{\Delta}{AKM}(K\hat{A}M = 90^o)$ έχουν:

(1) $AB = AM$ ($A\overset{\Delta}{B}M$ ισοσκελές)

(2) $\hat{B}_1 = \hat{M}_1$ (το αποδείξαμε)

Άρα $A\overset{\Delta}{B}\Lambda = A\overset{\Delta}{K}M$ οπότε:

• $B\Lambda = KM$

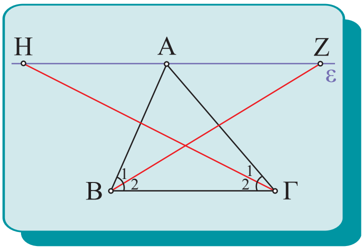
• $A\Lambda = AK$, δηλαδή το $A\overset{\Delta}{K}\Lambda$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Α.

Άσκηση 18

Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία ε//ΒΓ. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνουν την ε στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα δείξτε ότι ΑΒ + ΑΓ = ΖΗ.

Λύση

Έχουμε



$$\left.\begin{aligned} \hat{B}_1 &= \hat{B}_2 \text{ (ΒΖ διχοτόμος)} \\ \hat{B}_2 &= \hat{Z} \text{ (εντός εναλλάξ των ΒΓ // ε)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\hat{B}_1 = \hat{Z} \Leftrightarrow B\hat{A}Z$ ισοσκελές $\Leftrightarrow AB = AZ$ (1)

Ομοίως

$$\left.\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1 &= \hat{\Gamma}_2 \text{ (ΓΗ διχοτόμος)} \\ \hat{\Gamma}_2 &= \hat{H} \text{ (εντός εναλλάξ των ΒΓ // ε)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = \hat{H} \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}H \text{ ισοσκελές } \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow A\Gamma = AH$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε $AB + A\Gamma = AZ + AH = ZH$.

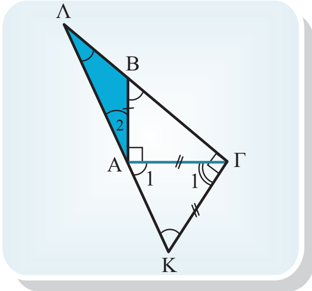
Άσκηση 19

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma\left(\hat{A} = 1^{\llcorner}\right)$ φέρουμε κάθετη ημιευθεία στην ΒΓ προς το μέρος του Α, επί της οποίας παίρνουμε τμήμα ΓΚ = ΑΓ. Στην προέκταση της υποτείνουσας ΓΒ παίρνουμε τμήμα ΒΛ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}K = 2 \cdot A\hat{\Lambda}B$.

Λύση

• Είναι ΑΒ = ΒΛ οπότε το τρίγωνο ΑΒΛ είναι ισοσκελές και $\hat{A}_2 = \hat{\Lambda}$. Όμως η $\hat{B}$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΛ, οπότε

$$\hat{A}_2 + \hat{\Lambda} = \hat{B} \Leftrightarrow 2 \cdot \hat{\Lambda} = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{\Lambda} = \frac{\hat{B}}{2}$$



• $A\Gamma = \Gamma K$ άρα $A\overset{\Delta}{\Gamma}K$ ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{K}$. Όμως

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{A}_1 + \hat{K} = 180^o \Leftrightarrow 90^o - \hat{\Gamma} + 2\cdot\hat{A}_1 = 180^o \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\hat{A}_1 = 90^o + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 45^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

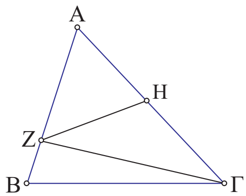
• Το $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο Α, οπότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$
Έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \left(45^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) + \hat{\Lambda} = 45^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 45^o + \frac{\hat{\Gamma} + \hat{B}}{2} = 45^o + \frac{90^o}{2} = 90^o$$

Οπότε από το $A\overset{\Delta}{\Gamma}K$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1 = 180^o - 2\cdot\hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 180^o - 2\cdot\left(90^o - \hat{A}_2\right) \Leftrightarrow$

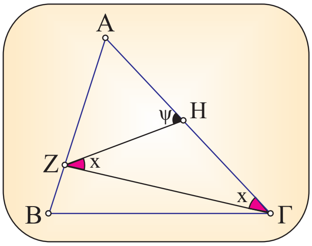
$$\hat{\Gamma}_1 = 180^o - 180^o + 2\cdot\hat{A}_2 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 2\cdot\hat{A}_2 \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}K = 2\cdot\hat{\Lambda} \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}K = 2\cdot A\hat{\Lambda}B$$

Άσκηση 20



Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} < 2\hat{\Gamma}$. Στην ΑΒ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε $A\hat{\Gamma}Z = \hat{A}/2$ και στην ΑΓ σημείο Η ώστε $H\hat{Z}\Gamma = \hat{A}/2$. Να δειχθεί ότι ΖΑ = ΖΗ = ΗΓ.

Λύση



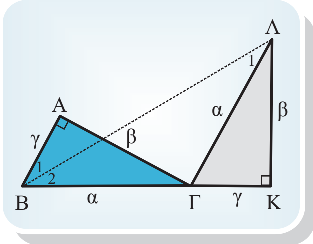
Είναι $H\hat{\Gamma}Z = H\hat{Z}\Gamma = x$
Στο τρίγωνο ΗΖΓ η γωνία ψ είναι εξωτερική. Επομένως $\hat{\psi} = 2\hat{x} \Leftrightarrow \hat{\psi} = 2\cdot\frac{\hat{A}}{2} = \hat{A}$, απ' όπου $AZ = ZH$. Επειδή είναι $ZH = H\Gamma$ έχουμε: $AZ = ZH = H\Gamma$.

Άσκηση 21

Στην προέκταση της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου $A\overset{\Delta}{B}\Gamma\left(\hat{A} = 90^o\right)$ παίρνουμε τμήμα ΓΚ = γ. Φέρουμε ημιευθεία $Kx \perp BK$ προς το μέρος του Α. Επί της Κx παίρνουμε τμήμα ΚΛ = β. Να δείξετε ότι η ΒΛ διχοτομεί την $\hat{B}$.

Λύση

Φέρουμε την ΓΛ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ και $\Gamma\overset{\Delta}{K}\Lambda$. Αυτά έχουν:



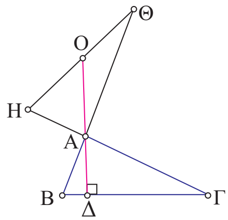
• $\hat{A} = \hat{K} = 90^o$
• $AB = K\Gamma = \gamma$ (υπόθεση)
• $A\Gamma = K\Lambda = \beta$ (υπόθεση)

Άρα $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Gamma K\Lambda}$, οπότε ΒΓ = ΓΛ, δηλαδή το τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Gamma\Lambda}$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ. Συνεπώς $\hat{B}_2 = \hat{\Lambda}_1$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του.

Επίσης από την ισότητα των τριγώνων έχουμε $A\hat{B}\Gamma = K\hat{\Gamma}\Lambda$.
Άρα ΑΒ//ΓΛ, αφού τεμνόμενες από τη ΒΚ, σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ίσες.

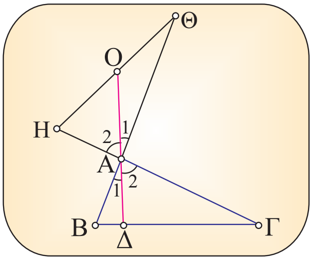
Οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Lambda}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΛ που τέμνονται από την ΒΛ. Συνεπώς $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, δηλαδή η ΒΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

Άσκηση 22



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Στις προεκτάσεις των ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος της κορυφής Α παίρνουμε τμήμα του ΑΘ = ΑΓ και ΑΗ = ΑΒ. Να δειχθεί ότι η προέκταση του ύψους ΑΔ περνάει από το μέσο Ο της ΘΗ.

Λύση

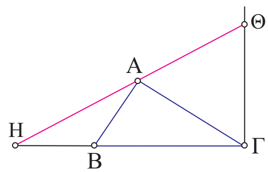


Είναι $AB = AH$, $A\Gamma = A\Theta$ και $B\hat{A}\Gamma = \Theta\hat{A}H$. Άρα τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΑΘΗ, οπότε $\hat{H} = \hat{B}$ και $\hat{\Theta} = \hat{\Gamma}$. Είναι $\hat{A}_2 + \hat{\Gamma} = 90^o$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$. Άρα $\hat{A}_2 = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{H} = \hat{A}_2$, οπότε $OA = OH$.

Ίδια αποδεικνύεται ότι $\hat{A}_1 = \hat{\Theta}$, οπότε $OA = O\Theta$.

Επομένως $O\Theta = OH$.

Άσκηση 23

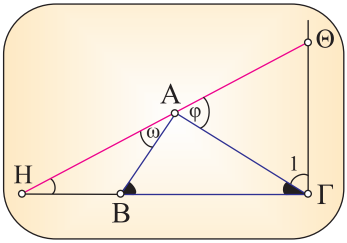


Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^o\right)$ προεκτείνουμε τη ΓΒ κατά τμήμα ΒΗ = ΑΒ. Φέρνουμε τη $\Gamma x \perp B\Gamma$ και παίρνουμε τμήμα ΓΘ = ΑΓ. Να δείξετε ότι τα σημεία Η, Α και Θ είναι συνευθειακά.

Λύση

Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{H} = \hat{\omega}$. Το τρίγωνο ΑΘΓ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{\Theta} = \hat{\varphi}$.

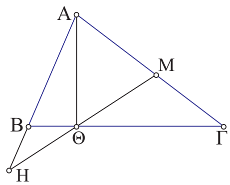
Επειδή $\Gamma x \perp B\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma} = 90^o$ ή $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ ή $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}$. Αλλά $\hat{B} = 2\hat{\omega}$ (εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΗ). Άρα $\hat{\Gamma}_1 = 2\hat{\omega}$. Στο τρίγωνο ΑΘΓ έχουμε $2\hat{\varphi} + \hat{\Gamma}_1 = 180^o$ ή $2\hat{\varphi} + 2\hat{\omega} = 180^o$ ή $\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 90^o$.



Άρα $\hat{\varphi} + \hat{\omega} + \hat{A} = 90^o + 90^o = 180^o$, οπότε η ΗΑΘ είναι ευθεία.

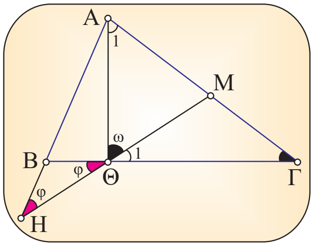
Άσκηση 24

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε το ύψος ΑΘ και στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΗ = ΒΘ Να δειχθεί ότι η ΘΗ περνάει από το μέσο της ΑΓ.



Λύση

Επειδή $B\Theta = BH$, το τρίγωνο ΒΘΗ είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{H} = \hat{\Theta} = \hat{\varphi}$, $\hat{B} = \hat{\varphi} + \hat{\varphi} = 2\hat{\varphi}$ (εξωτερική του τριγώνου ΒΗΘ). Επειδή $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ (υπόθεση), είναι $\hat{\varphi} = \hat{\Gamma}$. Είναι όμως $\hat{\Theta}_1 = \hat{\varphi}$ (κατάκορυφήν). Άρα $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο ΘΜΓ είναι ισοσκελές, άρα $\Theta M = M\Gamma$ (1). Επειδή $\hat{\omega} = \hat{A}_1$ (συμπληρωματικές των $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Gamma}$) το τρίγωνο ΑΜΘ είναι ισοσκελές. Άρα $AM = M\Theta$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $AM = M\Gamma$, δηλαδή το Μ είναι το μέσον της ΑΓ.



Άσκηση 25

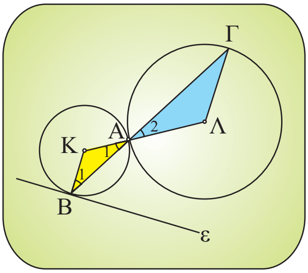
Δίνονται οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Από το Α φέρνουμε ευθεία που τέμνει τους κύκλους (Κ,R), (Λ,ρ) στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,R) στο σημείο Β, να δείξετε ότι:

α. $\Lambda\hat{\Gamma}A = K\hat{B}A$ **β. $\Gamma\Lambda \perp (\varepsilon)$**

Λύση

α. Φέρνουμε τις ΚΛ και ΛΓ. Το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισοσκελές γιατί $K\hat{B}A = \hat{A}_1$ (1). Ομοίως το

τρίγωνο ΑΛΓ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{A}_2 = \Lambda\hat{\Gamma}A$ (2). Όμως $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (3) γιατί είναι κατακορυφήν. Από τις (1) και (2), λόγω της (3), έχουμε: $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$



β. Στο τρίγωνο ΚΒΑ έχουμε: $\hat{K} = 180° - K\hat{B}A - \hat{A}_1$

Στο τρίγωνο ΑΛΓ έχουμε: $\hat{\Lambda} = 180° - \Lambda\hat{\Gamma}A - \hat{A}_2$

Όμως $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$ (από **α.**), άρα ΚΒ//ΛΓ γιατί σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες.

Είναι: $KB \perp (\varepsilon)$ (Η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής)

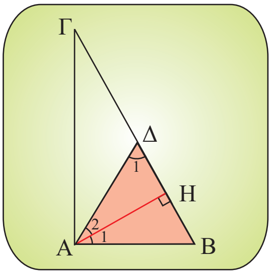
Άρα $\Lambda\Gamma \perp (\varepsilon)$.

Άσκηση 26

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και ΑΒ<ΑΓ φέρνουμε το ύψος ΑΗ. Αν Δ είναι συμμετρικό του Β ως προς το Η, να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι αμβλεία και $A\hat{\Delta}\Gamma - 90° = \hat{\Gamma}$

Λύση

Στο τρίγωνο ΑΔΒ το ύψος ΑΗ είναι και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με ΑΔ=ΑΒ, $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (2).



Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (3) (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)

Στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{B} + \Delta\hat{A}B = 180°$$

$$2\hat{\Delta}_1 + \Delta\hat{A}B = 180° \text{ (λόγω της (1))}$$

$$2\hat{\Delta}_1 = 180° - \Delta\hat{A}B$$

$$\hat{\Delta}_1 = 90° - \frac{\Delta\hat{A}B}{2} \quad (4)$$

Οι γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $\hat{\Delta}_1$ είναι παραπληρωματικές οπότε:

$$A\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Delta}_1 = 180°$$

$$A\hat{\Delta}\Gamma = 180° - \hat{\Delta}_1 \overset{(4)}{=} 180° - \left(90° - \frac{\Delta\hat{A}B}{2}\right) =$$

$$= 180° - 90° + \frac{\Delta\hat{A}B}{2} = 90° + \frac{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}{2} =$$

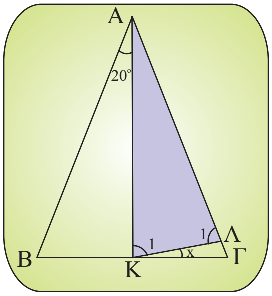
$$= 90° + \frac{2\hat{A}_1}{2} = 90 + \hat{A}_1 \overset{(3)}{=} 90° + \hat{\Gamma}$$

Άρα η $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι αμβλεία και $A\hat{\Delta}\Gamma - 90° = \hat{\Gamma}$.

Άσκηση 27

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} > 20°)$ με $AB = A\Gamma$ και τα σημεία Κ, Λ των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AK = A\Lambda$ και $K\hat{A}B = 20°$. Να υπολογιστεί η γωνία $\Gamma\hat{K}\Lambda$.

Λύση



Έστω $\Gamma\hat{K}\Lambda = x$. Επειδή το τρίγωνο ΚΑΛ είναι ισοσκελές $(AK = A\Lambda)$, έχουμε $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$. Η γωνία $\Gamma\hat{K}A$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΚΒ, οπότε:

$$\Gamma\hat{K}A = 20° + \hat{B}$$

$$x + \hat{K}_1 = 20° + \hat{B}$$

$$x = 20° + \hat{B} - \hat{K}_1 \quad (1)$$

Όμως $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$ και $\hat{\Lambda}_1$ εξωτερική του τριγώνου ΚΛΓ, οπότε $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1 = x + \hat{\Gamma}$ (2).

Η (1) λόγω της (2) γίνεται: $x = 20° + \hat{B} - (x + \hat{\Gamma}) \Leftrightarrow x = 20° + \hat{B} - x - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$

$$2x = 20° + \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 2x = 20° \Leftrightarrow x = 10°$$

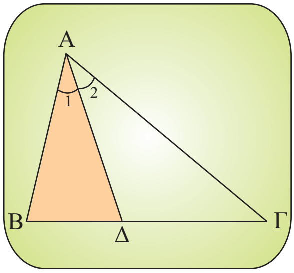
Άρα $x = \Gamma\hat{K}\Lambda = 10°$

Άσκηση 28

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 30°$. Αν ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να δείξετε ότι: $A\hat{\Delta}\Gamma = 105°$.

Λύση

Η $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΔΒ, οπότε:



$$A\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A}_1 + \hat{B} = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{B} =$$

$$= 90° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \hat{B} =$$

$$= 90° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{2\hat{B}}{2} =$$

$$= 90° + \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} =$$

$$= 90° + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} =$$

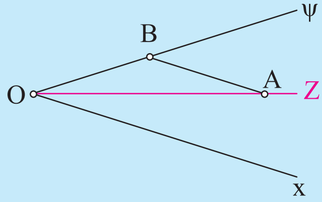
$$= 90° + \frac{30°}{2} = 90° + 15° = 105°$$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

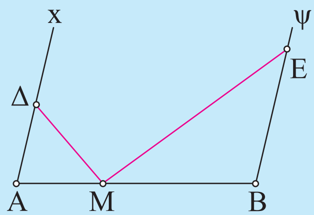
1. Στη γωνια xOψ η OZ είναι εσωτερική ευθεία. Από τυχαίο σημείο A της OZ φέρνουμε της AB//Ox. Να δειχθεί ότι:

α. Αν OZ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}\psi$, το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές,

β. Αν το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, η OZ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}\psi$.



2. Στα άκρα ευθύγραμμου τμήματος AB φέρουμε προς το ίδιο μέρος, τις παράλληλες Ax και Bψ. Στην AB παίρνουμε τυχαίο σημείο M, στην Ax τμήμα AΔ = AM και στην Bψ τμήμα BE = MB. Να δειχθεί ότι $\Delta\hat{M}E = 90^o$.

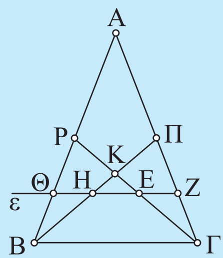


3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = AΓ), το ύψος AH και μια ευθεία παράλληλη στην BΓ που τέμνει τις AB και AΓ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

ι. το τρίγωνο AΔE είναι ισοσκελές.

ιι. $E\hat{\Delta}H = \Delta\hat{E}H$ και $A\hat{H}\Delta = A\hat{H}E$

4. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ, φέρνουμε τις διαμέσους BΠ, ΓP και μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση BΓ. Να δειχθεί ότι τα τμήματα της ευθείας, που βρίσκονται μεταξύ των ίσων πλευρών και των αντίστοιχων διαμέσων είναι ίσα.

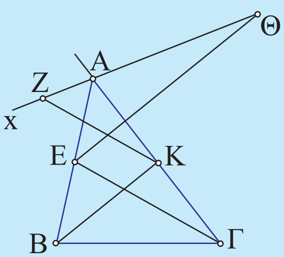


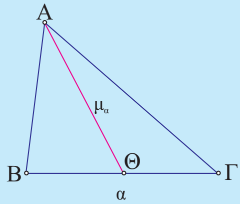
5. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ (A = 90°) και ΓΔ διχοτόμος. Μια ευθεία ε που διέρχεται από το B τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο σημείο E έτσι ώστε AB = BE. Να δείξετε ότι $A\hat{B}E = 90^o$.

6. Απο εξωτερικό σημείο A ενός κύκλου (K,ρ) φέρνουμε εφαπτόμενη AB. Πάνω στην AK παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα AΓ = AB και έστω Δ το σημείο τομής της BΓ με τον κύκλο. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο AKΔ είναι ορθογώνιο.

7. Στο τρίγωνο ABΓ, φέρνουμε τις διχοτόμους BK και ΓE και την εξωτερική διχοτόμο Ax, της γωνίας A. Από τα σημεία K και E, φέρνουμε τις παράλληλες στις διχοτόμους ΓE και BK, που τέμνουν την Ax στα Z και Θ. Να δειχθεί ότι:

$K\hat{Z}\Theta = \dfrac{\hat{B}}{2}$ και $E\hat{\Theta}A = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$.

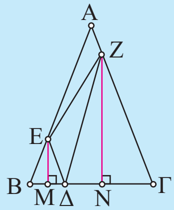




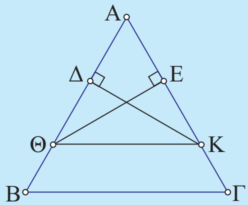
8. Να δείξετε ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις:

α. $\mu_\alpha > \dfrac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \hat{A} < 90^o$ **β.** $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 90^o$,

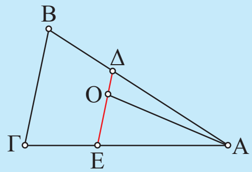
γ. $\mu_\alpha < \dfrac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \hat{A} > 90^o$



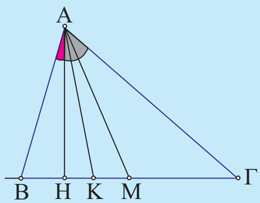
9. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Δ ένα τυχαίο σημείο της ΒΓ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Αν οι κάθετες προς τη ΒΓ από τα Μ και Ν τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να δείξετε ότι $A\hat{E}Z = E\hat{\Delta}Z$.



10. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και στις ίσες πλευρές του παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΑΕ. Φέρνουμε $\Delta K \perp AB (K \in A\Gamma)$ και $E\Theta \perp A\Gamma (\Theta \in AB)$. Να δειχθεί ότι ΘΚ//ΒΓ.



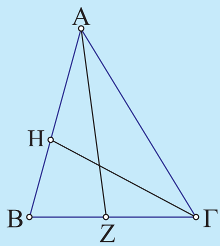
11. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ > ΑΓ > ΒΓ και Ο εσωτερικό σημείο του. Η παράλληλη προς τη ΒΓ που διέρχεται από το Ο τεμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
ι. ΟΑ<ΑΔ **ιι.** ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ<ΑΒ+ΑΓ



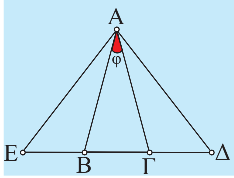
12. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΓ > ΑΒ. Φέρνουμε το ύψος ΑΗ, τη διχοτόμο ΑΚ και τη διάμεσο ΑΜ. Να δειχθούν οι σχέσεις:

α. $AH < \dfrac{AB + A\Gamma}{2}$ **β.** $B\hat{A}H < \Gamma\hat{A}H$

γ. ΚΒ < ΚΓ **δ.** ΚΒ < ΑΒ.



13. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διχοτόμους ΑΖ και ΓΗ. Αν είναι ΑΖ = ΑΒ και ΓΗ = ΒΓ, να δειχθεί ότι:
α. ΑΒ = ΒΓ και **β.** να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

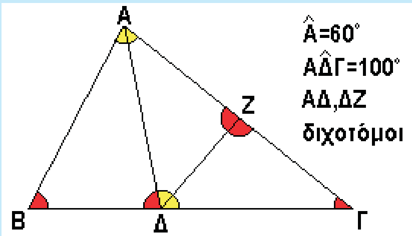


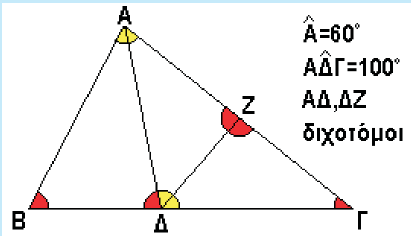
14. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και φ η γωνία κορυφής. Στη βάση ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΒΔ = ΑΒ και ΓΕ = ΓΑ. Να

υπολογίσετε συναρτήσει της φ τις γωνίες των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

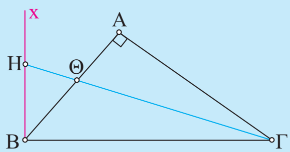
15. Μια γωνία ενός τριγώνου είναι τριπλάσια μιας άλλης. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο χωρίζεται σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

16. Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες στα παρακάτω σχήματα:



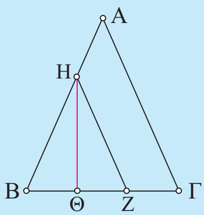


17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και η Bx κάθετη στην ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την ΑΒ στο Θ και την Bx στο Η. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΘΒΗ είναι ισοσκελές.



18. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε τα τμήματα $AH = \frac{1}{3}AB$ και $B\Theta = \frac{1}{3}B\Gamma$.

Να δειχθεί ότι $H\Theta \perp B\Gamma$.



19. Αν ένα δεκάγωνο έχει μία γωνία του ίση με 135^0 να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του αν γνωρίζετε ότι είναι μεταξύ τους ίσες.

20. Με πόσες ορθές γωνίες είναι ίσο το άθροισμα των γωνιών ενός οκταγώνου; Υπάρχει πολύγωνο με άθροισμα γωνιών ίσο με 13 ορθές;

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

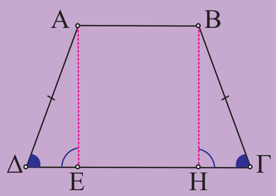
Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ . Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Δ τέμνονται στο σημείο Ε και σχηματίζουν οξεία γωνία φ και οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Γ και Δ τέμνονται στο σημείο Η και σχηματίζουν οξεία γωνία ω. Να αποδείξετε ότι :

Αν $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$ τότε $\hat{A} - \hat{\Delta} = 2\hat{\Gamma}$.

5ο Κεφάλαιο

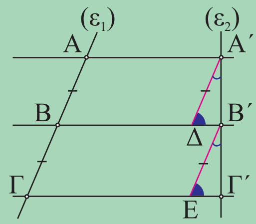
6ο μάθημα

Παραλληλόγραμμα



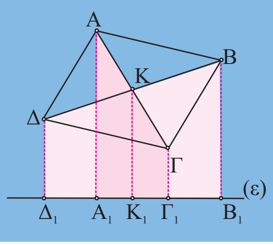
7ο μάθημα

Είδη παραλληλογράμμων



8ο μάθημα

Εφαρμογές παραλληλογράμμων

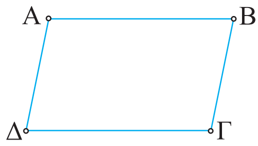


Μάθημα 6

Παραλληλόγραμμα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Παραλληλόγραμμο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει παράλληλες τις απέναντι πλευρές του ΑΒ//ΓΔ, ΑΔ//ΒΓ (βλ. σχ.) και έχει τις εξής ιδιότητες:



- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου είναι και το κέντρο συμμετρίας του. Τα είδη των παραλληλογράμμων είναι το ορθογώνιο, ο ρόμβος και το τετράγωνο.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Για να δείξουμε ότι ένα κυρτό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, δείχνουμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις (κριτήρια παραλληλογράμμων):

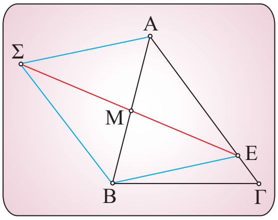
- Οι απέναντι πλευρές του ανά δύο είναι ίσες.
- Δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες.
- Οι απέναντι γωνίες του ανά δύο είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΑΓ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε η οποία διέρχεται από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ και θεωρούμε σημείο Σ πάνω στην ε τέτοιο ώστε ΣΜ = ΜΕ. Να δείξετε ότι ΑΣ//ΒΕ.

Λύση



Είναι ΜΑ = ΜΒ (Μ μέσο) και ΜΕ = ΜΣ (απο υπόθεση), επομένως στο τετράπλευρο ΣΑΕΒ οι διαγώνιοι διχοτομούνται δηλαδή είναι είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΣ//ΒΕ.

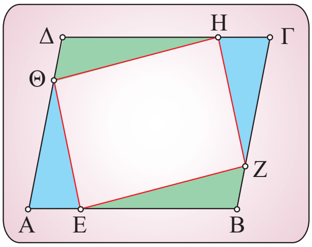
Άσκηση 2

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε τμήματα $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{4}$, $ΒΖ = \frac{ΒΓ}{4}$, $ΓΗ = \frac{ΓΔ}{4}$, $ΔΘ = \frac{ΔΑ}{4}$. Να δείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $Θ\overset{\triangle}{Η}Δ$ και $Β\overset{\triangle}{Ε}Ζ$

$$\left.\begin{aligned} ΔΘ &= \frac{ΑΔ}{4} = \frac{ΒΓ}{4} = ΒΖ \\ ΔΗ &= \frac{3ΓΔ}{4} = \frac{3ΑΒ}{4} = ΒΕ \\ Θ\hat{Δ}Η &= Ε\hat{Β}Ζ \end{aligned}\right\} \overset{Π-Γ-Π}{\Rightarrow} Θ\overset{\triangle}{Η}Δ = Β\overset{\triangle}{Ε}Ζ \Rightarrow ΘΗ = ΕΖ \quad (1)$$



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $Θ\overset{\triangle}{Ε}Α$ και $Γ\overset{\triangle}{Η}Ζ$

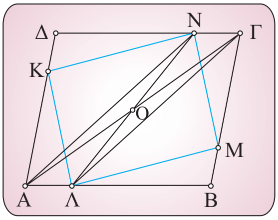
$$\left.\begin{aligned} ΑΕ &= \frac{ΑΒ}{4} = \frac{ΔΓ}{4} = ΓΗ \\ ΘΑ &= \frac{3ΑΔ}{4} = \frac{3ΒΓ}{4} = ΓΖ \\ Θ\hat{Α}Ε &= Η\hat{Γ}Ζ \end{aligned}\right\} \overset{Π-Γ-Π}{\Rightarrow} Θ\overset{\triangle}{Ε}Α = Γ\overset{\triangle}{Η}Ζ \Rightarrow ΘΕ = ΗΖ \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ που είναι εγγεγραμμένο σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει κοινό κέντρο με το ΑΒΓΔ.

Λύση

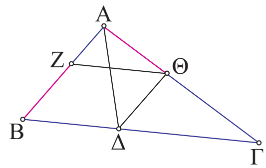


Θεωρούμε Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΛΝ και ΑΓ των ΚΛΜΝ και ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αρκεί να δείξουμε ότι $AO = O\Gamma$ και $ON = O\Lambda$. Γι'αυτό συγκρίνουμε τα τρίγωνα $K\overset{\triangle}{A}\Lambda$ και $N\overset{\triangle}{\Gamma}M$. Αυτά έχουν

$$\left.\begin{aligned} &K\Lambda = NM \quad (\text{απέναντι πλευρές παρ/μου}) \\ &A\widehat{K}\Lambda = N\widehat{M}\Gamma \quad (\text{έχουν πλευρές παραλληλες}) \\ &A\widehat{\Lambda}K = M\widehat{N}\Gamma \quad (\text{έχουν πλευρές παραλληλες}) \end{aligned}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Rightarrow} K\overset{\triangle}{A}\Lambda = M\overset{\triangle}{N}\Gamma \Rightarrow A\Lambda = N\Gamma$$

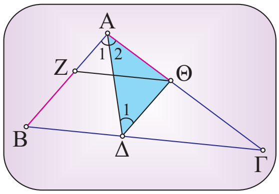
Άρα ΑΛ//= ΝΓ, έτσι το ΑΛΓΝ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες. Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται ,δηλαδή $AO = O\Gamma$ και $ON = O\Lambda$.

Άσκηση 4



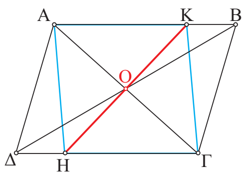
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από το Δ φέρνουμε την ΔΘ//ΑΒ $(\Theta \in A\Gamma)$ και την ΘΖ//ΒΓ $(Z \in AB)$. Αποδείξτε ότι $A\Theta = BZ$.

Λύση



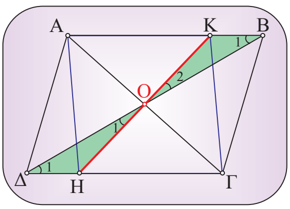
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος) και $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ (αφού ΔΘ// ΑΒ). Επομένως $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1$, δηλ. το τρίγωνο ΑΔΘ είναι ισοσκελές, οπότε $A\Theta = \Theta\Delta$ (1).
Επειδή το ΒΔΘΖ είναι παραλληλόγραμμο λόγω της (1) έχουμε: $A\Theta = \Theta\Delta = BZ$.

Άσκηση 5



Από το κέντρο Ο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε ευθεία, που τέμνει τις δύο απέναντι πλευρές στα σημεία Κ και Η. Να δειχθεί ότι το ΑΚΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



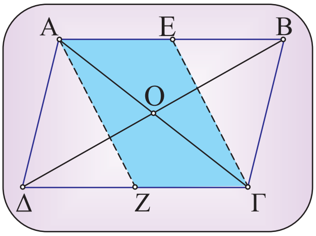
Τα τρίγωνα ΔΟΗ και ΟΚΒ είναι ίσα διότι έχουν:

$\Delta O = OB$, $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$. Άρα $OH = OK$.
Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΚΗ του τετραπλεύρου ΑΚΓΗ διχοτομούνται. Επομένως το ΑΚΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 6

Έστω Ε και Ζ, τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
i. το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
ii. οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρέχουν.

Λύση

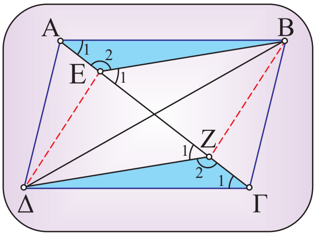


i. Έχουμε $AE // = \Gamma Z$, άρα το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
ii. Οι ΑΓ, ΒΔ ως διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομούνται από στο Ο. Οι ΕΖ, ΑΓ είναι διαγώνιοι του ΑΕΓΖ, οπότε η ΕΖ διέρχεται από το μέσο Ο της ΑΓ. Άρα οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΖ συντρέχουν.

Άσκηση 7

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο της ΑΓ. Φέρουμε ΔΖ//ΒΕ (Ζ σημείο της ΑΓ). Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΖ.

Λύση



Είναι $\overset{\Delta}{AB}E = \overset{\Delta}{\Delta Z}\Gamma$ ($AB = \Delta\Gamma$, $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, $\hat{E}_2 = \hat{Z}_2$,

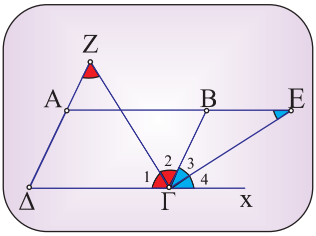
αφού $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$) άρα $BE = \Delta Z$.

Αλλά είναι και $BE // \Delta Z$, οπότε το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $\Delta E // BZ$.

Άσκηση 8

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα $BE = B\Gamma$ και στην ημιευθεία ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε $\Delta Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $Z\hat{\Gamma}E = 90°$.

Λύση



Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{Z} = \hat{\Gamma}_1, (\Delta Z = \Delta\Gamma) \\ \hat{Z} = \hat{\Gamma}_2 \, (\text{εντός εναλλάξ})\end{array}\right\} \text{άρα } \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E} = \hat{\Gamma}_3, (BE = B\Gamma) \\ \hat{E} = \hat{\Gamma}_4 \, (\text{εντός εναλλάξ})\end{array}\right\} \text{άρα } \hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4 \quad (2)$$

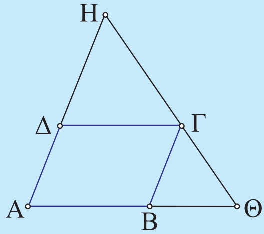
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $Z\Gamma \perp \Gamma E$ ως διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών, άρα: $Z\hat{\Gamma}E = 90°$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

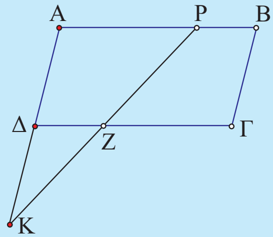
1. Στο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήματα ΒΘ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΗ = ΓΔ. Να δειχθεί ότι:

α. $\Delta\hat{\Gamma}H = B\hat{\Gamma}\Theta$

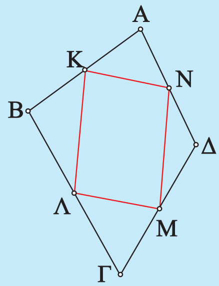
β. τα σημεία Η, Γ, Θ είναι συνευθειακά.



2. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ρ και Ζ στις πλευρές ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, ώστε $PB = \frac{1}{3}AB$ και $\Delta Z = \frac{1}{3}\Delta\Gamma$. Η ΡΖ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ. Να δειχθεί ότι ΔΚ = ΑΔ.



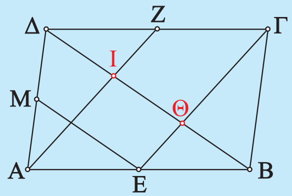
3. Το τετράπλευρο, που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών άλλου τετραπλεύρου είναι παραλληλόγραμμο.



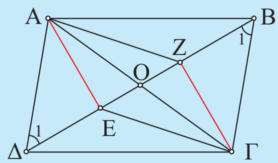
4. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ.

α. Να δειχθεί ότι η διαγώνιος ΒΔ χωρίζεται σε τρία ίσα μέρη (τριχοτομείται) από τις ΑΖ και ΓΕ.

β. Αν Ι, Θ τα σημεία που τριχοτομούν τη ΒΔ και Μ το μέσο της ΑΔ, να δείξετε ότι η ΕΜ διχοτομεί την ΑΙ.



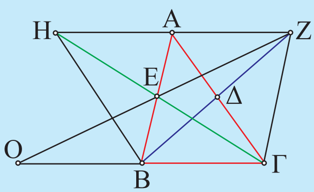
5. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις ΑΕ και ΓΖ κάθετες στη ΔΒ. Να δειχθεί ότι το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο και έχει το ίδιο κέντρο με το ΑΒΓΔ.



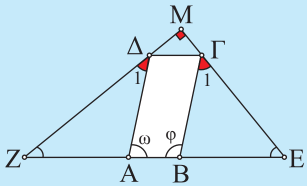
6. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ και τις προεκτείνουμε κατά ΔΖ = ΒΔ και ΕΗ = ΓΕ. Να δειχθεί:

α. ΑΗ = ΑΖ **β.** τα σημεία Η, Α, Ζ είναι συνευθειακά

γ. αν Ο το σημείο που η ΖΕ τέμνει τη ΒΓ, είναι ΟΒ = ΒΓ.



7. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο μέρη και παίρνουμε τμήματα ΒΕ και ΑΖ ίσα με την ΒΓ. Αν Μ το σημείο τομής των ΖΔ και ΕΓ,να δείξετε ότι το τρίγωνο ΖΜΕ είναι ορθογώνιο.



Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

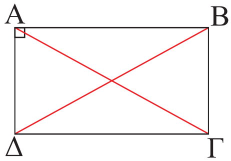
Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε έτσι ώστε ΑΔ = ΓΕ. Φέρνουμε τη ΓΖ παράλληλη και ίση με την ΕΔ. Να δειχθεί ότι η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου.

Μάθημα 7

Είδη παραλληλογράμμων

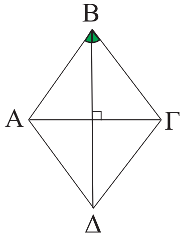
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο



Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια ορθή γωνία και έχει την ιδιότητα οι διαγώνιές του να είναι ίσες.

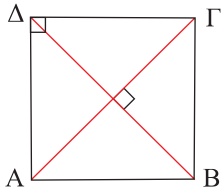
Ρόμβος



Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και έχει τις εξής ιδιότητες:

- οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα.
- οι διαγώνιές του διχοτομούν τις γωνίες του.

Τετράγωνο



Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος και έχει τις εξής ιδιότητες:

- οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα, διχοτομούν τις γωνίες του και είναι ίσες.
- όλες οι γωνίες είναι ορθές.
- όλες οι πλευρές είναι ορθές.
- οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

ΤΕΤΡΑΠΛ.	Παραλληλόγραμμο	Ορθογώνιο παρ/μο	Ρόμβος	Τετράγωνο
ΠΛΕΥΡΕΣ	Απέναντι πλευρές • είναι ίσες • είναι παράλληλες	Απέναντι πλευρές • είναι ίσες • είναι παράλληλες	Απέναντι πλευρές • είναι ίσες • είναι παράλληλες Διαδοχικές πλευρές • είναι ίσες	Απέναντι πλευρές • είναι ίσες • είναι παράλληλες Διαδοχικές πλευρές • είναι ίσες
ΓΩΝΙΕΣ	Απέναντι γωνίες είναι ίσες	Ολες οι γωνίες είναι ίσες	Απέναντι γωνίες είναι ίσες	Ολες οι γωνίες είναι ίσες
ΔΙΑΓΩΝΙΕΣ	• διχοτομούνται	• διχοτομούνται • είναι ίσες • •	• διχοτομούνται • • είναι κάθετες • διχοτομούν τις γωνίες	• διχοτομούνται • είναι ίσες • είναι κάθετες • διχοτομούν τις γωνίες

.Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Για να δείξουμε ότι ένα κυρτό τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, δείχνουμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις (κριτήρια ορθογωνίων παραλληλογράμμων):

1. Δείχνουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω:
- Έχει μία ορθή γωνία.
- Οι διαγώνιες είναι ίσες.

2. Δείχνουμε ότι έχει τρείς γωνίες ορθές.
3. Δείχνουμε ότι έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

Για να δείξουμε ότι ένα κυρτό τετράπλευρο είναι ρόμβος, δείχνουμε ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω κριτήρια ρόμβων:
1. Δείχνουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω:
- Μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία.
- Έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.

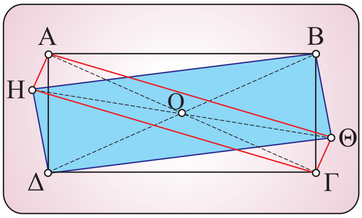
2. Δείχνουμε ότι έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Για να δείξουμε ότι ένα κυρτό τετράπλευρο είναι τετράγωνο, δείχνουμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις (κριτήρια τετραγώνων):
Δείχνουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο και ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω:
- Έχει μία ορθή γωνία και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- Έχει μία ορθή γωνία και μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία του.
- Έχει μία ορθή γωνία και τις διαγώνιες κάθετες.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του επίσης ίσες.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και μια από αυτές διχοτομεί μια γωνία του.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1
Έστω τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΘΓΗ με κοινή διαγώνιο την ΑΓ. Να δείξετε ότι το ΒΘΔΗ είναι επίσης ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Λύση



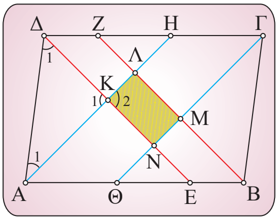
Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα ΑΓ = ΒΔ (1).
Επειδή το ΒΘΔΗ είναι ορθογώνιο οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα ΑΓ = ΗΘ (2).
Από τις (1) και (2) έχουμε ΑΓ = ΒΔ = ΗΘ και τα μέσα τους ταυτίζονται.
Επειδή οι ΒΔ και ΗΘ διχοτομούνται το ΒΘΔΗ είναι παρ/μο και επειδή ΒΔ = ΗΘ έχει και ίσες διαγωνίους άρα το ΒΘΔΗ είναι ορθογώνιο παρ/μο.

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμου σχηματίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Λύση

Έστω οι διχοτόμοι ΑΗ,ΒΖ,ΓΘ και ΔΕ που τέμνονται στα Κ,Λ,Μ και Ν.
Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει $\widehat{A}+\widehat{\Delta}=180^o$
Στο τρίγωνο ΑΔΚ ισχύει:



$$\widehat{A}_1+\widehat{\Delta}_1+\widehat{K}_1=180^o \Leftrightarrow \frac{\widehat{A}}{2}+\frac{\widehat{\Delta}}{2}+\widehat{K}_1=180^o \Leftrightarrow$$

$$\frac{\widehat{A}+\widehat{\Delta}}{2}+\widehat{K}_1=180^o \Leftrightarrow \widehat{K}_1=180^o-\frac{180^o}{2} \Leftrightarrow \widehat{K}_1=90^o$$

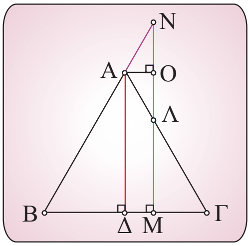
και επειδή $\widehat{K}_1=\widehat{K}_2$ ως κατακορυφήν, έχουμε $\widehat{K}_2=90^o$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι $\widehat{\Lambda}=\widehat{M}=\widehat{N}=90^o$, άρα το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο .

Άσκηση 3

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Από τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρνουμε κάθετη στη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ν και Λ αντίστοιχα.
Να δείξετε ότι ΜΛ + ΜΝ = 2ΑΔ.

Λύση



Απο το Α φέρουμε $AO \perp MN$. Τότε $\left.\begin{matrix} MN \perp B\Gamma \\ AO \perp MN \end{matrix}\right\} \Rightarrow AO // B\Gamma$.

Επίσης

$$\left.\begin{matrix} N\widehat{A}O=\widehat{B} \ (\text{εντός, εκτός και επι τα αυτά των } AO, B\Gamma) \\ \Lambda\widehat{A}O=\widehat{\Gamma} \ (\text{εντός εναλλάξ των } AO, B\Gamma) \\ \widehat{B}=\widehat{\Gamma} \ (AB\Gamma \text{ ισοσκελές}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow N\widehat{A}O=\Lambda\widehat{A}O$$

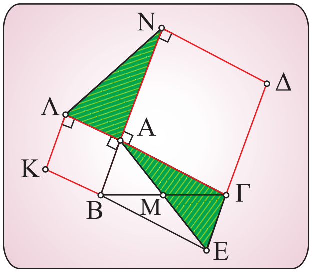
Στο τρίγωνο ΑΝΛ η ΑΟ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα είναι ισοσκελές και συνεπώς η ΑΟ είναι διάμεσος . Δηλαδή ΟΝ = ΟΛ. Επειδή το ΑΔΜΟ είναι ορθογώνιο ισχύει ΑΔ = ΜΟ.

Άρα έχουμε $\left.\begin{matrix} M\Lambda=MO-\Lambda O=A\Delta-NO \\ MN=MO+ON=A\Delta+ON \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} M\Lambda+MN=2A\Delta$

Άσκηση 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά από αυτό τα τετράγωνα ΑΒΚΛ και ΑΓΔΝ. Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου να δείξετε ότι ΛΝ = 2ΑΜ.

Λύση



Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ. Τότε το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, διότι ΒΜ = ΜΓ (από υπόθεση) και ΑΜ = ΜΕ .
Άρα ΑΒ = ΓΕ.

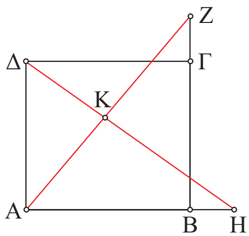
Τα τρίγωνα $\Lambda\overset{\triangle}{A}N$ και $E\overset{\triangle}{\Gamma}A$ είναι ίσα διότι:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma E \overset{(1)}{=} AB = A\Lambda \ \ (AB K\Lambda \ \ \text{τετράγωνο}) \\ A\Gamma = AN \ \ (AN\Delta\Gamma \ \ \text{τετράγωνο}) \\ \Lambda\hat{A}N = A\hat{\Gamma}E \ \ (\text{αμβλείες γωνίες με κάθετες πλευρές}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

$$\Lambda\overset{\triangle}{A}N = E\overset{\triangle}{\Gamma}A \Rightarrow \Lambda N = AE$$

επειδή ΑΜ = ΜΕ έχουμε τελικά ΛΝ = 2ΑΜ

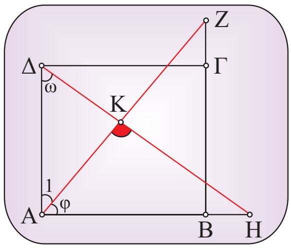
Άσκηση 5



Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ, κατά τμήματα ΒΗ = ΓΖ. Να δειχθεί ότι: α. ΑΖ = ΔΗ, β. ΑΖ ⊥ ΔΗ

Λύση

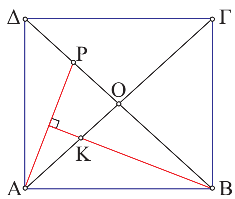
α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΑΒΖ είναι ίσα (ΑΔ = ΑΒ, ΑΗ = ΒΖ). Άρα είναι ΔΗ = ΑΖ.



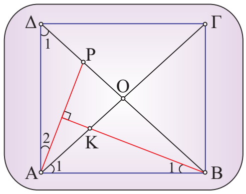
β. Από τα ίδια τρίγωνα ΑΔΗ και ΑΒΖ έχουμε $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$. Επειδή $\hat{A}_1 + \hat{\varphi} = 90^o$ έχουμε $\hat{A}_1 + \hat{\omega} = 90^o$, απ'όπου $AK\Delta = 90^o$, οπότε $AZ \perp \Delta H$.

Άσκηση 6

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και παίρνουμε τυχαίο σημείο Ρ του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΡ, που τέμνει την ΑΟ στο Κ. Να δειχθεί ότι
α. ΒΚ = ΑΡ
β. ΓΚ = ΒΡ.



Λύση

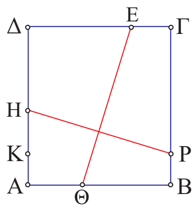


α. Είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = 45^o$ και ΑΒ = ΑΔ. Επειδή $\hat{B}_1 = \hat{A}_2$ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές), τα τρίγωνα ΑΔΡ και ΒΚΑ είναι ίσα. Επομένως ΑΡ = ΒΚ και ΑΚ = ΔΡ.

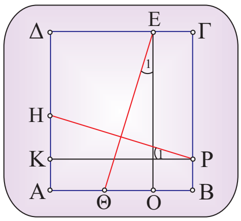
β. Επειδή ΑΚ = ΔΡ και ΑΓ = ΒΔ (διαγώνιες τετραγώνου), θα είναι ΑΓ - ΑΚ = ΒΔ - ΔΡ δηλ. ΓΚ = ΒΡ.

Άσκηση 7

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε,Θ,Η,Ρ πάνω στις πλευρές του ΔΓ,ΑΒ,ΑΔ,ΒΓ αντίστοιχα έτσι ώστε τα τμήματα ΕΘ, ΗΡ, να είναι κάθετα. Να δειχθεί ότι τα ΕΘ και ΗΡ είναι ίσα.



Λύση



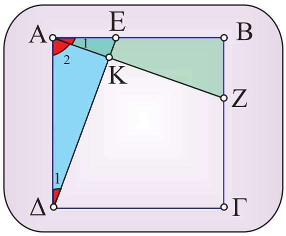
Φέρνουμε $EO \perp AB$ και $PK \perp A\Delta$. Είναι ΡΚ = ΕΟ (ίσες με τις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ) και $\hat{P}_1 = \hat{E}_1$ (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές). Επομένως τα τρίγωνα ΕΘΟ, ΚΡΗ είναι ίσα διότι ΡΚ = ΕΟ, $\hat{E}_1 = \hat{P}_1$ και $\hat{O} = \hat{K} = 90^o$. Οπότε είναι και ΕΘ = ΡΗ.

Άσκηση 8

Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε $AE = BZ$**. Να αποδείξετε ότι**

i. $AZ = \Delta E$ **ii.** $AZ \perp \Delta E$

Λύση



i. $\overset{\Delta}{AB}Z = \overset{\Delta}{A\Delta}E \; \left(AE = BZ, AB = A\Delta, \hat{A} = \hat{B} = 90°\right)$.

Άρα $AZ = \Delta E$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$.

ii. Είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$, οπότε στο τρίγωνο ΑΔΚ είναι $\hat{K} = 90°$,αφού

$\hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90°$. Άρα $AZ \perp \Delta E$.

Άσκηση 9

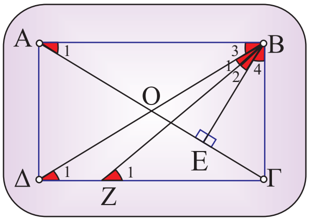
Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε $BE \perp A\Gamma$**. Αν η διχοτόμος της γωνίας** $\Delta\hat{B}E$ **τέμνει τη ΓΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι** $B\Gamma = \Gamma Z$**.**

Λύση

Έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{B}_3 = \hat{\Delta}_1$ (1) (αφού το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο) και $\hat{A}_1 = \hat{B}_4$ (2) (ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές). Επομένως

$\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1 + \hat{B}_1$ (ως εξωτερική) $\overset{(1),(2)}{=} \hat{B}_4 + \hat{B}_1 = \hat{B}_4 + \hat{B}_2$, οπότε

$\hat{Z}_1 = \Gamma\hat{B}Z$. Άρα $B\Gamma = \Gamma Z$.



Άσκηση 10

Να αποδείξετε ότι:

i. το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό, ίσο με ένα από τα ύψη του.

ii. το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό, ίσο με το ύψος του.

Λύση

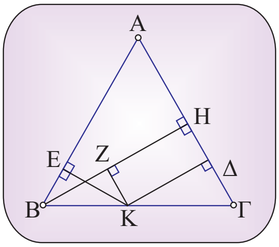
i. Έστω Κ τυχαίο σημείο της βάσης ΒΓ και ΒΗ το ύψος του τριγώνου. Φέρνουμε τις $K\Delta \perp A\Gamma$, $KE \perp AB$ και $KZ \perp BH$. Τότε είναι τα τρίγωνα ΒΕΚ ,ΒΖΚ είναι ίσα,διότι έχουν:

$\hat{Z} = \hat{E} = 90°$, ΚΒ κοινή, $\hat{B} = \hat{\Gamma} = B\hat{K}Z$,οπότε $KE = BZ$.

Απο το ορθογώνιο ΚΖΗΔ είναι ΚΔ = ΖΗ.

Απο τα παραπάνω με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

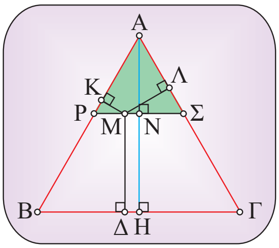
$K\Delta + KE = ZH + BZ = BH =$ σταθερό (ύψος του τριγώνου).



ii. Έστω Μ τυχαίο σημείο. Φέρουμε από το Μ τις κάθετες στις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα.

Τότε από το i. έχουμε: $MK + M\Lambda = AN$ (1) (αφού το τρίγωνο ΑΡΣ είναι ισόπλευρο). Επίσης $M\Delta = NH$ (2).

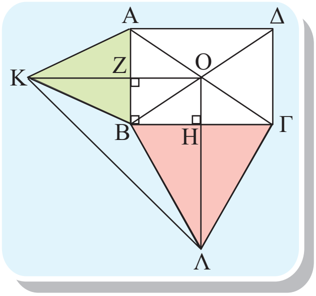
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $MK + M\Lambda + M\Delta = AH$ = σταθερό.



Άσκηση 11

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Εξωτερικά του ορθογωνίου κατασκευάζουμε τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΟΛ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Είναι ΚΑ = ΚΒ (αφού το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές)
ΟΑ = ΟΒ (αφού οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες)
Άρα η ΚΟ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ
Είναι ΛΒ = ΛΓ (αφού το τρίγωνο ΛΒΓ είναι ισοσκελές)
ΟΒ = ΟΓ (αφού οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες)
Άρα ΛΟ μεσοκάθετος του ΒΓ.
Τότε το ΒΖΟΗ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες $\left(\hat{B} = \hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ\right)$

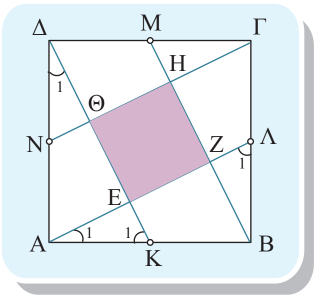
Άρα και $\hat{O} = 90^\circ$.

Άσκηση 12

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τμήματα ΑΛ, ΒΜ, ΓΝ, ΔΚ τεμνόμενα σχηματίζουν τετράγωνο.

Λύση

Είναι ΝΑ// = ΓΛ άρα ΝΑΛΓ παραλληλόγραμμο οπότε ΝΓ// = ΑΛ άρα και ΘΗ//ΕΖ (1)
Είναι ΜΔ// = ΚΒ άρα ΔΜΒΚ παραλληλόγραμμο οπότε
ΜΒ// = ΔΚ άρα και ΗΖ//ΘΕ (2)
Από (1), (2) έχουμε ότι ΘΗΖΕ παραλληλόγραμμο.



Είναι $A\overset{\Delta}{\Lambda}B = A\overset{\Delta}{\Delta}K$ αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $AB = A\Delta$

και $AK = B\Lambda = \dfrac{\alpha}{2}$ όπου α η πλευρά του τετραγώνου

Τότε $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{\Lambda}B$ είναι

$$\hat{A}_1 + \hat{\Lambda}_1 = 90^\circ \overset{\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1}{\Leftrightarrow} \hat{A}_1 + \hat{K}_1 = 90^\circ.$$

Τότε στο $A\overset{\Delta}{E}K$ είναι $\hat{E} = 90^\circ$
Αφού το ΘΗΖΕ έχει και μία γωνία ορθή είναι ορθογώνιο. Για να είναι τετράγωνο αρκεί να δείξω ότι δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες.

Είναι $\Theta E = \Delta K - \Delta\Theta - EK$

$EZ = A\Lambda - AE - Z\Lambda$

Είναι ΔΚ = ΑΛ (αφού $\overset{\Delta}{\text{ΑΛΒ}} = \overset{\Delta}{\text{ΑΔΚ}}$)

ΑΕ = ΔΘ (αφού $\overset{\Delta}{\text{ΔΝΘ}} = \overset{\Delta}{\text{ΑΕΚ}}$ ΑΚ = ΔΝ, $\hat{\Theta} = \hat{E} = 90^o$, $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$)

ΕΚ = ΖΛ (αφού $\overset{\Delta}{\text{ΑΕΚ}} = \overset{\Delta}{\text{ΖΛΒ}}$ ΑΚ = ΛΒ, $\hat{E} = \hat{Z} = 90^o$, $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$)
Άρα ΘΕ = ΕΖ. Οπότε ΘΗΖΕ είναι τετράγωνο.

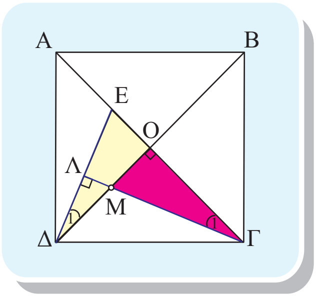
Άσκηση 13

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο του και Ε τυχαίο σημείο της ΑΟ. Φέρνουμε ΓΛ ⊥ ΔΕ όπου Μ το σημείο τομής της ΓΛ με την ΔΟ.
Να δείξετε ότι:
i. ΓΜ = ΔΕ **ii. ΒΜ = ΓΕ**

Λύση

i. Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{ΔΕΟ}}$ και $\overset{\Delta}{\text{ΓΜΟ}}$. Αυτά έχουν ΓΟ = ΔΟ ως μισά των διαγωνίων του τετραγώνου.

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Delta}_1$ είναι ίσες ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές αφού ΔΕ ⊥ ΓΛ, ΔΟ ⊥ ΓΟ



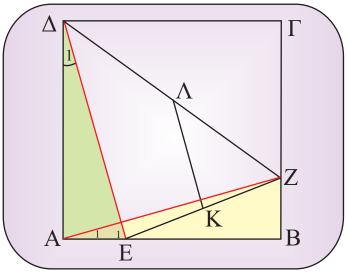
Άρα $\overset{\Delta}{\text{ΔΕΟ}} = \overset{\Delta}{\text{ΓΜΟ}} \Leftrightarrow$ ΓΜ = ΔΕ

ii. Είναι ΒΜ = ΒΟ + ΟΜ και ΓΕ = ΓΟ + ΟΕ
Όμως ΒΟ = ΓΟ ως μισά των διαγωνίων και ΟΜ = ΟΕ από την ισότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{\text{ΔΕΟ}}$ και $\overset{\Delta}{\text{ΓΜΟ}}$. Άρα ΒΜ = ΓΕ.

Άσκηση 14

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και πάνω στις ΑΒ, ΒΓ, παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα ώστε ΑΕ = ΒΖ. Να δειχθεί ότι:
α. i. ΑΖ = ΔΕ, ii. ΑΖ ⊥ ΔΕ
β. Αν Κ είναι το μέσο της ΕΖ και Λ το μέσο της ΔΖ να δειχθεί ότι ΚΛ ⊥ ΑΖ.

Λύση



α. i. Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΑΒΖ είναι ίσα, γιατί έχουν: $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, $ΑΔ = ΑΒ$ ως πλευρές τετραγώνου και $ΑΕ = ΒΖ$ από υπόθεση. Άρα: $ΑΖ = ΔΕ$ (1)

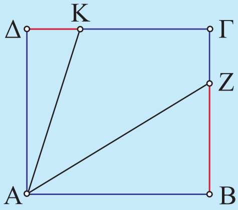
ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΔΑΕ και ΑΒΖ έχουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{Δ}_1$ (2). Για να δείξουμε ότι $ΑΖ \perp ΔΕ$, αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 90°$.

Έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 \overset{(2)}{=} \hat{Δ}_1 + \hat{E}_1 = 90°$, άρα $ΑΖ \perp ΔΕ$

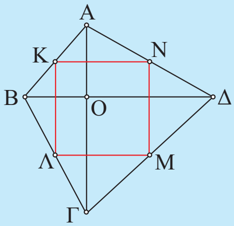
β. Στο τρίγωνο ΔΖΕ, τα Λ, Κ είναι μέσα των ΔΖ και ΕΖ αντίστοιχα, οπότε ΚΛ//ΔΕ. Όμως $ΔΕ \perp ΑΖ$, άρα $ΚΛ \perp ΑΖ$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

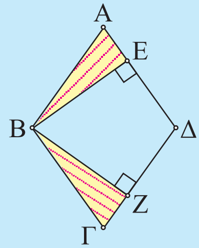
1. Στην πλευρά ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Κ. Αν η διχοτόμος της $B\hat{A}K$ τέμνει την ΒΓ στο Ζ, να δείξετε ότι η ΑΚ είναι ίση με το άθροισμα των ΒΖ και ΔΚ.



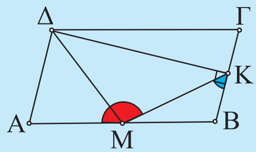
2. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοι του να τέμνονται κάθετα . Να αποδείξετε, ότι τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του, είναι κορυφές ορθογωνίου.



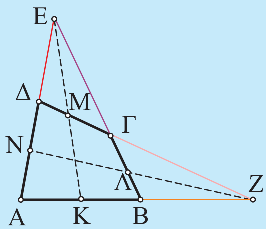
3. Να αποδείξετε, ότι ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, αν και μόνον αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.



4. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με την πλευρά ΑΒ να είναι διπλάσια της ΒΓ. Από την κορυφή Δ φέρνουμε τη ΔΚ κάθετη στη ΒΓ. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ, να δείξετε ότι η γωνία ΑΜΚ είναι τριπλάσια της γωνίας ΜΚΒ.



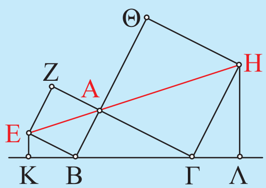
5. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με τις δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές. Αν οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Ε, οι πλευρές ΒΑ, ΓΔ στο Ζ και οι διχοτόμοι των γωνιών Ε και Ζ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ στα Κ, Λ, Μ, Ν, να δείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.



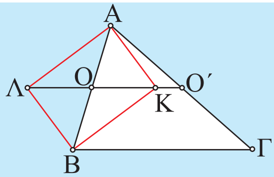
6. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^{o}\right)$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΑΓΗΘ. Φέρνουμε τις αποστάσεις ΕΚ και ΗΛ στη ΒΓ. Να δειχθεί ότι:

α. Τα τμήματα ΓΛ = ΚΒ **β.** ΕΚ + ΗΛ = ΒΓ

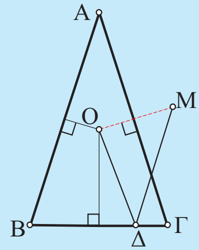
γ. Τα σημεία Ε, Α, Η είναι συνευθειακά



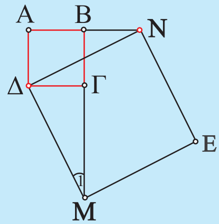
7. Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τις αποστάσεις ΑΚ και ΑΛ στην εσωτερική και στην εξωτερική διχοτόμο της γωνίας Β. Να δειχθεί ότι:
α. Το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο
β. Η ευθεία ΚΛ είναι παράλληλη στη ΒΓ και περνάει από το μέσο της πλευράς ΑΓ.



8. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρνουμε τις μεσοκάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ, που τέμνονται στο Ο. Από το Μ, που είναι το συμμετρικό του Ο ως προς την ΑΓ φέρνουμε τη ΜΔ//ΑΒ (Δ σημείο της ΒΓ). Να δειχθεί ότι $M\hat{O}\Delta = 90^o$.



9. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒκατά ΒΝ ίσο με ΑΒ και την πλευρά ΒΓ κατά ΓΜ ίσο με ΑΝ. Κατασκευάζουμε το παραλληλλόγραμμο ΔΝΕΜ. Να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο.



Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε το σημείο Ο ώστε $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 15^o$ **. Να δειχθεί ότι τα τρίγωνα ΔΟΓ είναι ισόπλευρο.**

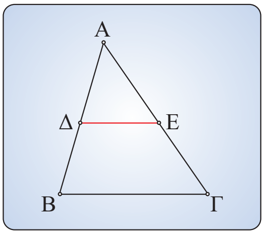
Μάθημα 8

Εφαρμογές παραλληλογράμμων

Α. Απαραίτητες γνώσεις θεωρίας

Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα, που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά αυτού, και ίσο με το μισό αυτής.

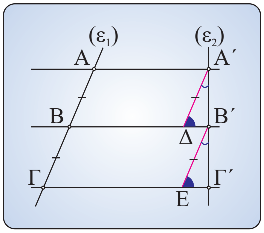


Θεώρημα

Η παράλληλος που άγεται από το μέσον μιας πλευράς τριγώνου προς μια άλλη πλευρά του, περνάει και από το μέσον της τρίτης πλευράς του τριγώνου.

Θεώρημα

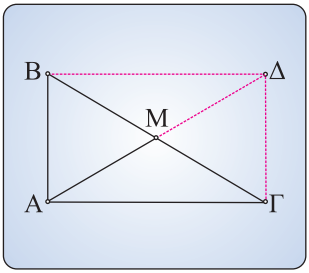
Εάν ευθείες παράλληλες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που συναντούν.



Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

Η διάμεσος που άγεται προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίση με το μισό αυτής.

Αν η διάμεσος τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία ντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

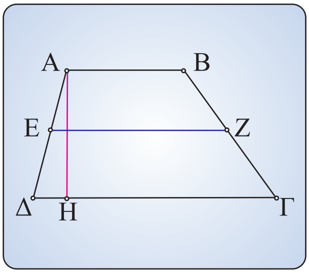


Πόρισμα *Η κάθετος πλευρά ορθ. τριγώνου, που είναι απέναντι από γωνία 30° είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.*

ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Ορισμοί

i) Τραπέζιο λέγεται κάθε τετράπλευρο που έχει μόνο τις δύο πλευρές του παράλληλες π.χ. το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.



ii) Διάμεσος τραπεζίου λέγεται το ευθ. τμήμα που έχει άκρα τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών, π.χ. το ΕΖ.

iii) Βάσεις τραπεζίου λέγονται οι παράλληλες πλευρές του π.χ. οι ΑΒ, ΓΔ.

iv) Ύψος τραπεζίου λέγεται η απόσταση των μη παραλλήλων πλευρών του, π.χ. το ΑΗ.

v) Ισοσκελές τραπέζιο, λέγεται το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.

vi) Ορθογώνιο ή **δισορθογώνιο** τραπέζιο, λέγεται το τραπέζιο που έχει δύο γωνίες ορθές π.χ το ΑΒΓΗ.

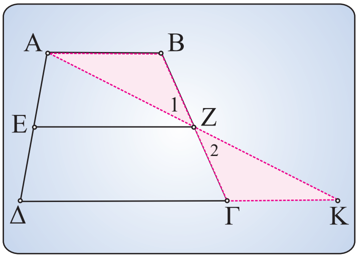
Σε κάθε τραπέζιο ισχύουν τα θεωρήματα:

Θεώρημα

Η διάμεσος κάθε τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα αυτών.

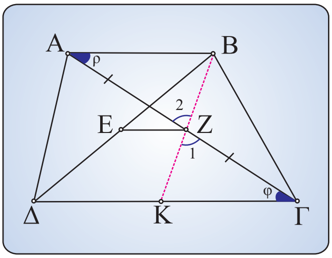
Απόδειξη

Φέρουμε την ΑΖ που τέμνει την ΔΓ στο Κ, τότε τριγ. $ΑΒΖ =$ τριγ. $ΖΓΚ$ $(ΖΒ = ΖΓ, Ζ_1 = Ζ_2, Α\hat{Β}Ζ = Ζ\hat{Γ}Κ)$, από την ισότητα έχουμε $ΑΒ = ΓΚ$ και $ΑΖ = ΖΚ$. Στο τρίγωνο ΑΔΚ η ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΑΚ άρα θα είναι παράλληλη προς την ΔΚ και ίση με το μισό αυτής δηλ. $ΕΖ = \frac{ΔΚ}{2} = \frac{ΔΓ + ΓΚ}{2} = \frac{ΔΓ + ΑΒ}{2}$.



Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου είναι παράλληλο προς τις βάσεις και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.



Απόδειξη

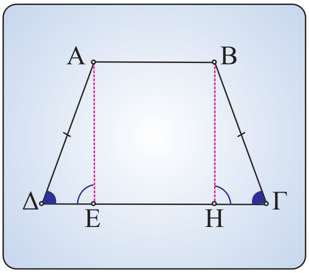
Φέρνουμε την ΒΖ που τέμνει την ΓΔ στο Κ. Τότε τριγ.

$ABZ =$ τριγ. $KZ\Gamma$ $\left(ZA = Z\Gamma, \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2, \hat{\varphi} = \hat{\rho}\right)$. Από την ισότητα έχουμε $K\Gamma = AB$ και $ZB = ZK$. Στο τρίγωνο ΒΔΚ η ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΔ, ΒΚ άρα $EZ \parallel \Delta K$ και $EZ = \dfrac{\Delta K}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma - K\Gamma}{2} = \dfrac{\Delta\Gamma - AB}{2}$.

Στο ισοσκελές τραπέζιο ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα:

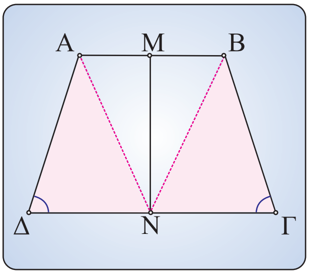
Θεώρημα
Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες είναι ίσες και αντίστροφα.

Θεώρημα
Οι διαγώνιες κάθε ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες και αντίστροφα.



Θεώρημα
Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα μέσα των βάσεών του, είναι κάθετο στις βάσεις.

Πόρισμα *Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο η ευθεία που περνά από τα μέσα των βάσεών του, είναι άξονας συμμετρίας αυτού.*



Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

1. **Οι προσκείμενες σε μία βάση γωνίες είναι ίσες.**
2. **Οι διαγώνιές του είναι ίσες.**

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Για να δείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, δείχνουμε ότι :

Η διάμεσος του τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί.

2. Για να δείξουμε ότι ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές , δείχνουμε ότι :

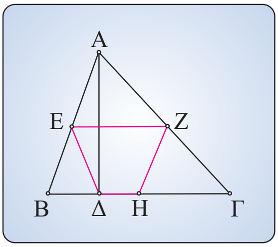
Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες είναι ίσες.
Οι διαγώνιές του είναι ίσες.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών τριγώνου και το ίχνος ενός ύψους είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.

Λύση

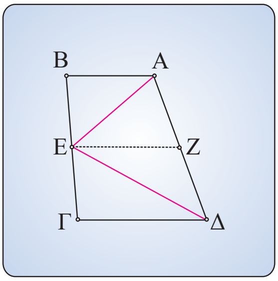


Έστω Ε, Ζ, Η τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ και Δ το ίχνος του ύψους ΑΔ, θα δείξουμε, ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Η $ΕΖ \parallel ΒΓ$ γιατί ενώνει τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, άρα το ΕΖΗΔ είναι τραπέζιο. $ΗΖ = \frac{ΑΒ}{2} (1)$ γιατί ενώνει τα μέσα των ΑΓ, ΒΓ. Η $ΔΕ = \frac{ΑΒ}{2} (2)$ γιατί είναι η διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΔΒ. Από τις (1) και (2) έχουμε $ΗΖ = ΔΕ$, άρα το ΕΖΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Άσκηση 2

Αν σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ η μία από τις μη παράλληλες πλευρές η ΑΔ, είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων, και Ε είναι το μέσο της απέναντι πλευράς της να αποδείξετε ότι η γωνία $ΑΕΔ = 90^o$.

Λύση



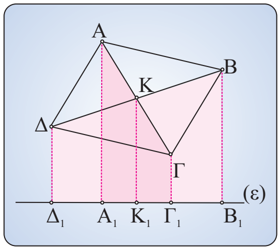
Έστω ΑΒΓΔ ένα τραπέζιο στο οποίο είναι $ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ (1)$ και Ε το μέσο της ΒΓ, θα δείξουμε, ότι $Α\hat{Ε}Δ = 90^o$. Φέρνουμε την διάμεσο ΕΖ του τραπεζίου, τότε $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} (2)$. Από τις (1), (2) έπεται $ΕΖ = \frac{ΑΔ}{2}$ άρα το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ορθογώνιο στο Ε, δηλ. $Α\hat{Ε}Δ = 90^o$.

Άσκηση 3

Να αποδείξετε, ότι το άθροισμα των αποστάσεων των κορυφών ενός παραλληλογράμμου από μια ευθεία που δεν τέμνει το παραλληλόγραμμο, είναι ίσο με την τετραπλάσια απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου, από την ευθεία.

Λύση

Από το τραπέζιο $ΑΑ_1Γ_1Γ$ επειδή η $ΚΚ_1$ είναι διάμεσος αυτού έχουμε: $ΚΚ_1 = \frac{ΑΑ_1 + ΓΓ_1}{2} (1)$.



Όμοια από το τραπέζιο $ΒΒ_1Δ_1Δ$ έχουμε: $ΚΚ_1 = \dfrac{ΒΒ_1 + ΔΔ_1}{2} (2)$.

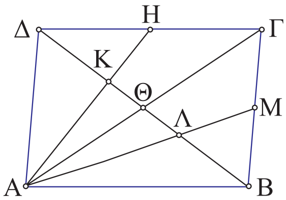
Προσθέτουμε τις (1), (2) και έχουμε:

$$2ΚΚ_1 = \frac{ΑΑ_1 + ΒΒ_1 + ΓΓ_1 + ΔΔ_1}{2}$$ ή

$$4ΚΚ_1 = ΑΑ_1 + ΒΒ_1 + ΓΓ_1 + ΔΔ_1.$$

Άσκηση 4

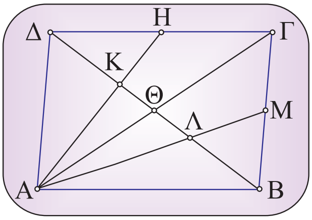
Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τα Μ και Η είναι μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ. Να δειχθεί ότι η διαγώνιος ΒΔ διαιρείται σε τρία ίσα μέρη από τις ΑΜ, ΑΗ.



Λύση

Έστω Κ, Λ και Θ τα σημεία τομής της ΒΔ από τις ΑΗ, ΑΜ, ΑΓ, αντίστοιχα. Στο ΑΒΓ οι ΑΜ, ΒΘ είναι διάμεσοι, οπότε :

$$ΒΛ = \frac{2}{3}ΒΘ = \frac{1}{3}ΒΔ \qquad (1)$$



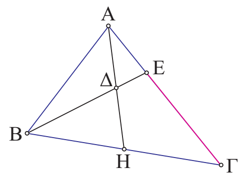
Στο ΑΔΓ οι ΑΗ, ΔΘ είναι διάμεσοι, οπότε :

$$ΔΚ = \frac{2}{3}ΔΘ = \frac{1}{3}ΒΔ \qquad (2)$$

Απο τις (1) και (2) έχουμε: $ΚΛ = ΔΚ = ΒΛ = \dfrac{1}{3}ΒΔ$.

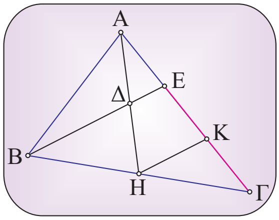
Άσκηση 5

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Έστω Δ το μέσο της διαμέσου ΑΗ. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι: $ΑΓ = \dfrac{3}{2}ΕΓ$



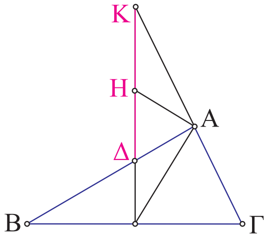
Λύση

Φέρνουμε απο το Η την παράλληλη στην ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ. Επειδή το Δ είναι το μέσο της ΑΗ και $ΔΕ // ΗΚ$ το Ε είναι το μέσο της ΑΚ, δηλ. $ΑΕ = ΕΚ$. Επειδή το Η είναι μέσο της ΒΓ και $ΗΚ // ΒΕ$ το Κ είναι το μέσο της ΕΓ, δηλ. $ΕΚ = ΚΓ$.



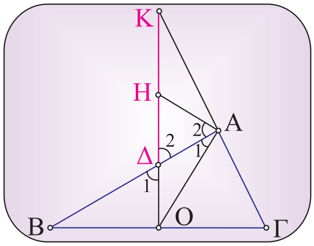
Άρα $ΕΓ = ΕΚ + ΚΓ = 2 \cdot ΚΓ = \dfrac{2}{3}ΑΓ$.

Άσκηση 6



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 30^o$. Από το μέσο Ο της ΒΓ φέρνουμε την κάθετη στη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Κ. Φέρνουμε ακόμα στο Α την κάθετη στην ΑΟ, που τέμνει την ΟΚ στο Η. Να αποδείξετε ότι το Η είναι το μέσο της ΚΔ.

Λύση



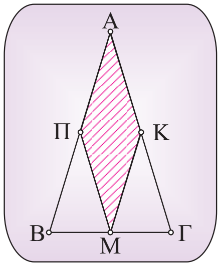
Επειδή $\hat{B} = 30°$ είναι $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Επίσης $AO = \dfrac{B\Gamma}{2}$ (διάμεσος ορθ. τριγώνου). Επομένως το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο.

Τότε $\widehat{A_1} = 30^0 \Rightarrow \widehat{\Delta_1} = 60^0 = \widehat{\Delta_2} = \widehat{A_2}$,δηλ. ΑΗ = ΗΔ.
Όμως ΑΗ = ΗΚ οπότε το Η μέσο του ΚΔ.

Άσκηση 7

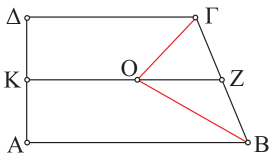
Από το μέσο Μ της βάσης ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τις παράλληλες ΜΠ και ΜΚ προς τις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το ΑΠΜΚ είναι ρόμβος.

Λύση



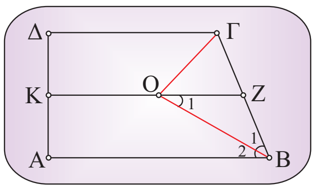
Το ΑΚΜΠ είναι παραλληλόγραμο ,διότι έχει απέναντι πλευρές παράλληλες. Επειδή $M\Pi = AK = \dfrac{A\Gamma}{2}$ και $MK = A\Pi = \dfrac{AB}{2}$ έχουμε ΜΠ = ΜΚ. Επομένως το ΑΠΜΚ είναι ρόμβος αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Άσκηση 8



Η διχοτόμος της γωνίας Β τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνει τη διάμεσο ΚΖ στο Ο. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΓΟΒ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Είναι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$,αφού η ΒΟ είναι διχοτόμος της γωνίας Β και

$\hat{B}_2 = \hat{O}_1$,αφού ΚΖ//ΑΒ.

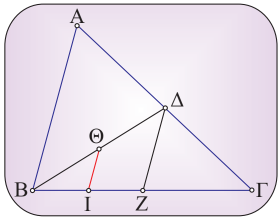
Άρα $\hat{B}_1 = \hat{O}_1$,δηλ. $OZ = ZB = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Άρα η διάμεσος του τριγώνου ΓΟΒ είναι ίση με το μισό της πλευράς που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΓΟΒ είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 9

Στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε το σημείο Ι ώστε $BI=\frac{1}{4}B\Gamma$. Φέρνουμε τη διάμεσο ΒΔ και έστω Θ το μέσο της. Να δειχθεί ότι $I\Theta // = \frac{AB}{4}$.

Λύση

Φέρνουμε απο το Δ παράλληλη πρός την ΑΒ που διέρχεται απο το μέσο Ζ της ΒΓ. Τότε $IZ=\frac{1}{4}B\Gamma=BI$.



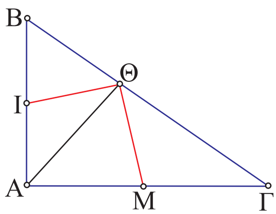
Επίσης $I\Theta //= \frac{\Delta Z}{2}$ (διότι τα Ι, Θ είναι μέσα των ΒΖ, ΒΔ) και

$\Delta Z //= \frac{AB}{2}$ (διότι τα Δ, Ζ είναι τα μέσα των ΑΓ, ΒΓ).

Άρα $I\Theta //= \frac{\Delta Z}{2} //= \frac{\frac{AB}{2}}{2} = \frac{AB}{4}$.

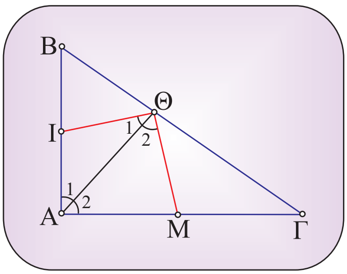
Άσκηση 10

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) φέρνουμε το ύψος ΑΘ και έστω Ι και Μ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι τρίγωνο ΙΘΜ είναι ορθογώνιο.



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΘ η ΘΙ είναι διάμεσος οπότε $\Theta I=\frac{AB}{2}=IA$. Επομένως $\hat{\Theta}_1=\hat{A}_1$.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ η ΘΜ είναι διάμεσος οπότε $\Theta M=\frac{A\Gamma}{2}=AM$. Άρα $\hat{\Theta}_2=\hat{A}_2$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω σχέσεων ,παίρνουμε : $\hat{\Theta}_1+\hat{\Theta}_2=\hat{A}_1+\hat{A}_2$ ή $I\hat{\Theta}M=\hat{A}=90^o$.

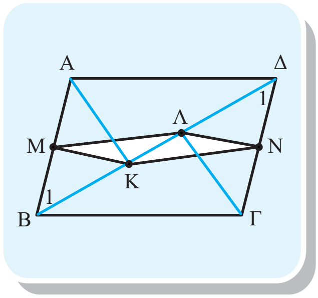
Άσκηση 11

Από τις κορυφές Α και Γ παραλληλογράμου ΑΒΓΔ φέρνουμε κάθετες προς τη διαγώνιο ΒΔ, τις ΑΚ και ΓΛ αντίστοιχα. Αν Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα να δείξετε ότι τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{K}B$ η ΚΜ είναι διάμεσος άρα $KM = \frac{AB}{2}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\overset{\triangle}{\Lambda}\Gamma$ η ΛΝ είναι διάμεσος άρα $\Lambda N = \frac{\Delta\Gamma}{2}$. Αφού $AB = \Delta\Gamma$ θα είναι $KM = \Lambda N$



Έχουμε $\begin{matrix} B\Lambda = BK + K\Lambda \;\; (1) \\ \Delta K = \Delta\Lambda + K\Lambda \;\; (2) \end{matrix}$

Όμως $A\overset{\triangle}{B}K = \Lambda\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma \begin{pmatrix} \hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ \\ AB = \Delta\Gamma \\ \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 \end{pmatrix}$

Άρα είναι ΒΚ=ΔΛ. Τότε από (1), (2) προκύπτει $B\Lambda = \Delta K$

Είναι $B\overset{\triangle}{M}\Lambda = \Delta\overset{\triangle}{K}N$ αφού $MB = \Delta N$ (μισά ίσων τμημάτων)

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ)

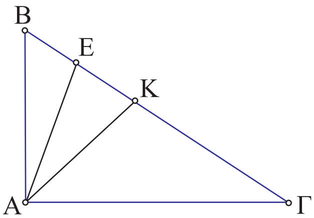
$B\Lambda = \Delta K$

Τότε και $M\Lambda = KN$

Άρα το ΜΛΝΚ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

Άσκηση 12

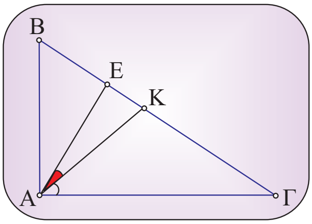
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΚ και το ύψος ΑΕ. Αν $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, να δειχθεί ότι $K\hat{A}E = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.



Λύση

Είναι $K\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma - K\hat{A}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

Διότι $K\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma}$, αφού η ΑΚ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και συνεπώς ισχύει $AK = \frac{1}{2}B\Gamma = K\Gamma$.



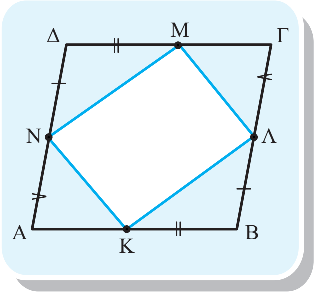
Άσκηση 13

Στις πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε τα ίσα τμήματα ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Δείξτε ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Τι θα πρέπει να ισχύει ώστε:

i. ΚΛΜΝ ρόμβος

ii. ΚΛΜΝ τετράγωνο

Λύση



Είναι $A\hat{N}K = M\hat{\Gamma}\Lambda$ αφού:

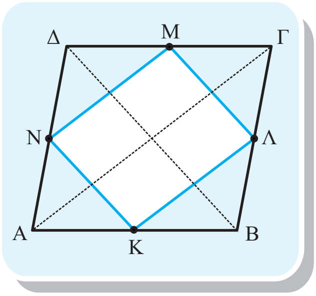
$AK = \Gamma M$

$\left.\begin{array}{l} AN = A\Delta - \Delta N \\ \Gamma\Lambda = \Gamma B - B\Lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow AN = \Gamma\Lambda$

$\hat{A} = \hat{\Gamma}$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

Συνεπώς $NK = M\Lambda$. Ομοίως $K\Lambda = MN$.
Άρα ΚΛΜΝ παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

i. Το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι μέσα των πλευρών.

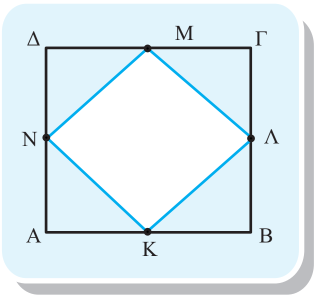


Τότε $NK // = \dfrac{\Delta B}{2}$

$K\Lambda // = \dfrac{A\Gamma}{2}$

Αφού $\Delta B = A\Gamma$ τότε $NK = K\Lambda$.
Επειδή το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι ρόμβος.

ii. Για να είναι τετράγωνο αρκεί το ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών.

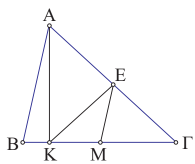


Τότε $NK//\Delta B$

$K\Lambda//A\Gamma$

Αφού στο τετράγωνο είναι $\Delta B \perp A\Gamma$ θα είναι και $NK \perp K\Lambda$. Άρα $K = 90^\circ$

Άσκηση 14



Στο τρίγωνο ΑΒΓ, είναι Β > Γ. Φέρνουμε το ύψος ΑΚ και θεωρούμε τα μέσα Μ και Ε των ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

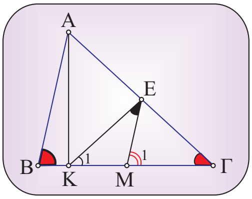
Να δειχθεί ότι $K\hat{E}M = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

Λύση

Είναι $K\hat{E}M = \hat{M}_1 - \hat{K}_1$ (αφού η $\hat{M}_1$ είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΚΕΜ και $\hat{K}_1 = \hat{\Gamma}$

(αφού η ΚΕ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ).Επίσης είναι $\hat{M}_1 = \hat{B}$ (αφού ΜΕ//ΑΒ).

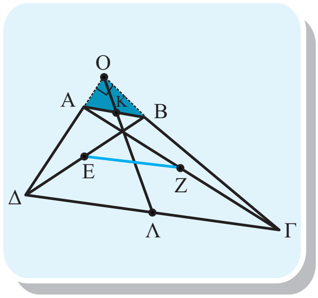
Από τα παραπάνω προκύπτει $\widehat{KEM} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.



Άσκηση 15

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ, ΓΔ > ΑΒ) του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ο κάθετα. Αν το Ο και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΔΓ είναι συνευθειακά να δείξετε ότι το ΚΛ είναι ίσο με το τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου.

Λύση



Στο ορθογώνιο $O\overset{\triangle}{A}B$ η ΟΚ είναι διάμεσος.

Άρα $OK = \frac{AB}{2}$.

Στο ορθογώνιο $O\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ η ΟΛ είναι διάμεσος.

Άρα $O\Lambda = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Είναι $K\Lambda = O\Lambda - OK = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$

Γνωρίζουμε ότι αν Ε, Ζ μέσα των διαγωνίων τότε $EZ = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$.

Άρα $K\Lambda = EZ$

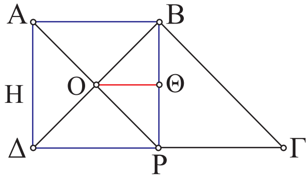
Άσκηση 16

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ(με ΑΒ//ΓΔ) και τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma = 2 \cdot AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BP \perp \Delta\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι:

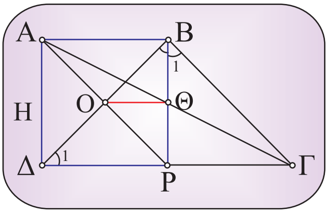
α. Οι ΒΡ και ΑΓ διχοτομούνται.

β. $AP \perp B\Delta$.

γ. Αν Ο είναι το μέσο της ΒΔ και Θ είναι το μέσο της ΑΓ, τότε ισχύει : ΟΘ = ΓΔ/4.



Λύση



α. Είναι $\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Rightarrow 3\hat{\Gamma}+\hat{\Gamma}=180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=45^\circ$.

Τότε είναι και $\hat{B}=135^\circ$. Φέρνουμε τη $B\text{Ρ} \perp \Delta\Gamma$. Από το ορθογώνιο ΑΒΡΔ έχουμε ΔΡ = ΑΒ = ΔΓ/2, οπότε το Ρ είναι μέσο της ΔΓ. Άρα το ΑΒΓΡ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς οι διαγώνιές του ΒΡ,ΑΓ διχοτομούνται.

β. Στο τρίγωνο ΔΒΓ η διάμεσος ΒΡ είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επειδή $\hat{\Delta}_1=\hat{\Gamma}=45^\circ$ είναι $\Delta\hat{B}\Gamma=90^\circ$. Τότε ΒΡ = ΔΓ/2 = ΔΡ. Επομένως το ορθογώνιο ΒΡΔΑ είναι τετράγωνο, που σημαίνει ότι οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα, δηλαδή $\text{ΑΡ} \perp \text{ΒΔ}$.

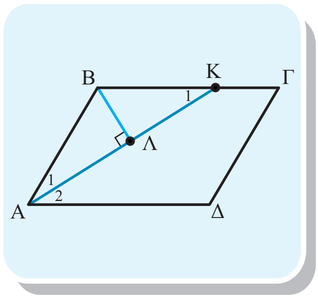
γ. Στο τρίγωνο ΑΡΓ η ΟΘ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΡ και ΑΓ, οπότε ισχύει:

$$\Theta\text{Ο}=\frac{1}{2}\text{Ρ}\Gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta\Gamma}{2}=\frac{\Delta\Gamma}{4}.$$

Άσκηση 17

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A}=60^\circ$ και ΑΚ διχοτόμος της $\hat{A}$ όπου Κ σημείο της ΒΓ. Αν Λ μέσο της ΑΚ να δείξετε ότι η ΒΛ διχοτομεί τη $\hat{B}$ και να εκφράσετε τη ΒΛ συναρτήσει του ΑΒ.

Λύση



$$\left.\begin{array}{l}\text{Είναι } \hat{A}_1=\hat{A}_2=30^\circ \\ \text{και } \hat{A}_2=\hat{K}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)}\end{array}\right\} \text{Συνεπώς } \hat{A}_1=\hat{K}$$

Δηλαδή το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A B K}$ είναι ισοσκελές και η ΒΛ είναι διάμεσος άρα διχοτόμος και ύψος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A \Lambda B}$ είναι: $\hat{A}_1=30^\circ \Leftrightarrow B\Lambda=\frac{AB}{2}$.

Άσκηση 18

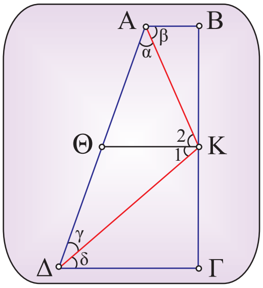
Σε ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ) είναι ΑΔ = ΑΒ + ΔΓ. Ενώνουμε το μέσο Κ της ΒΓ με τις κορυφές Α και Δ. Να δείξετε ότι οι ΑΚ και ΚΔ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Δ.

Λύση

Φέρνουμε την ΚΘ παράλληλη στην ΑΒ.

Είναι $K\Theta // =\frac{AB+\Gamma\Delta}{2}=\frac{A\Delta}{2}$. Δηλαδή ΚΘ = ΘΔ = ΘΑ.

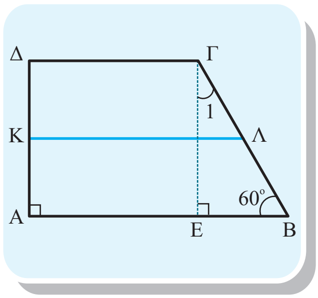
Άρα $\hat{\gamma}=\hat{K}_1$ και $\hat{K}_1=\hat{\delta}$ (ΘΚ // ΔΓ). Επομένως $\hat{\gamma}=\hat{\delta}$. Ομοίως $\hat{\alpha}=\hat{K}_2$ και $\hat{K}_2=\hat{\beta}$ (ΘΚ // ΑΒ), οπότε $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$.



Άσκηση 19

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o\right)$ με $\hat{B}=60^o$. Αν είναι ΒΓ = ΔΓ = 8 να βρεθεί το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου.

Λύση



Φέρνουμε το ύψος ΓΕ του τραπεζίου. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ είναι $\hat{\Gamma}_1=90^o-\hat{B}=90^o-60^o=30^o$.

Άρα $EB=\dfrac{B\Gamma}{2}=\dfrac{8}{2}=4$

Είναι $AB=AE+EB=\Delta\Gamma+EB=8+4=12$

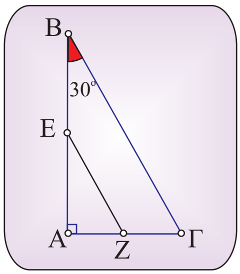
Τότε, αν Κ, Λ μέσα των μη παραλλήλων πλευρών θα είναι:

$$K\Lambda=\frac{AB+\Delta\Gamma}{2}=\frac{12+8}{2}=\frac{20}{2}=10$$

Άσκηση 20

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90°\right)$ με $\hat{B}=30°$. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $EZ=A\Gamma$.

Λύση



Στο ΑΒΓ αφού είναι $\hat{B}=30°$ ισχύει $A\Gamma=\dfrac{B\Gamma}{2}$.

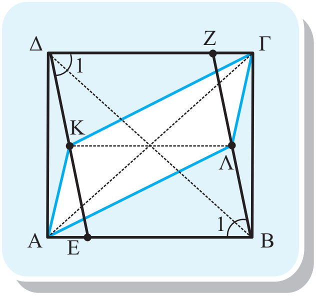
Στο ΑΒΓ αφού Ε, Ζ μέσα ΑΒ, ΑΓ ισχύει $EZ=\dfrac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $EZ=A\Gamma$.

Άσκηση 21

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Πάνω στις ΑΒ,ΔΓ αντίστοιχα, θεωρούμε σημεία Ε, Ζ τέτοια ώστε ΑΕ = ΓΖ. Αν Κ, Λ μέσα των ΔΕ, ΒΖ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο και ότι οι ΚΛ, ΑΓ, ΔΒ συντρέχουν.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ η ΑΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του. Άρα $ΑΚ = \frac{ΔΕ}{2}$ (1). Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΖ η ΓΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $ΓΛ = \frac{ΖΒ}{2}$ (2). Όμως $ΖΒ = ΔΕ$ (3) αφού $\overset{\Delta}{ΑΔΕ} = \overset{\Delta}{ΓΒΖ}$ (είναι ορθογώνια και έχουν ΑΔ = ΒΓ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου και ΑΕ = ΓΖ από υπόθεση).
Από (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι ΑΚ = ΓΛ.

Επίσης $Α\hat{Λ}Β = Δ\hat{Κ}Γ$ αφού:

ΔΓ = ΑΒ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
ΔΚ=ΛΒ ως μισά των ίσων τμημάτων ΔΕ, ΒΓ
$\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ

Συνεπώς ΚΓ = ΑΛ. Άρα το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.
Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού ΔΕ = ΒΖ και ΔΖ = ΕΒ αφού
ΔΖ = ΔΓ – ΖΓ και ΕΒ = ΑΒ – ΑΕ
Οι ΑΓ, ΚΛ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΚΓΛ άρα διχοτομούνται.
Όμως η ΑΓ διαγώνιος και του ΑΒΓΔ. Άρα διχοτομείται με την ΔΒ. Επομένως οι ΑΓ, ΚΛ, ΔΒ συντρέχουν στο Ο το κέντρο του ΑΒΓΔ.

Άσκηση 22

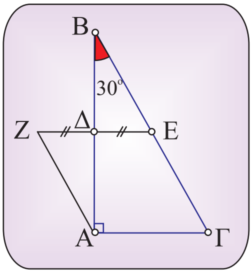
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{Α} = 90°)$ με $\hat{Β} = 30°$ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα $ΔΖ = ΕΔ$. Να αποδείξετε ότι το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.

Λύση

Έχουμε Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΒΓ, άρα $ΔΕ \parallel= \frac{ΑΓ}{2}$ οπότε είναι

$$ZE = 2\Delta E // = A\Gamma .$$

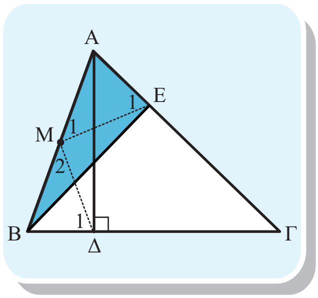
Επομένως το ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά $\hat{B} = 30°$, οπότε $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = E\Gamma$,δηλ. το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.



Άσκηση 23

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 45°$. Φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ, Μ μέσο της υποτείνουσας άρα

$$\Delta M = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ, Μ μέσο της υποτείνουσας άρα

$$EM = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

Από (1),(2) έχουμε ΔΜ = ΕΜ δηλαδή το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.

Για να είναι η $\hat{M} = 90^\circ$ αρκεί $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 90^\circ$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΕ (ΑΜ = ΜΕ) είναι:

$\hat{M}_1 + \hat{A} + \hat{E}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_1 = 180^\circ - 2\hat{A}$ αφού $\hat{A} = \hat{E}_1$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΔ (ΜΒ = ΜΔ) είναι:

$\hat{M}_2 + \hat{B} + \hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_2 = 180^\circ - 2\hat{B}$ αφού $\hat{B} = \hat{\Delta}_1$

Τότε:

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ - 2\hat{A} + 180^\circ - 2\hat{B} = 360^\circ - 2(\hat{A} + \hat{B})$$

Όμως $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Άρα $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ$.

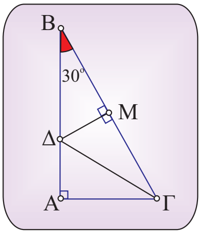
Άσκηση 24

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 30°$ η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ

τέμνει την πλευρα ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

i. $M\Delta = A\Delta$ **ii.** $M\Delta = \frac{AB}{3}$.

Λύση



i. Έχουμε $M\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta$, διότι

$$\left(M = A = 90°,\ \Delta\Gamma \text{ κοινή},\ A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma\right).$$

Άρα $M\Delta = A\Delta$.

ii. Στο τρίγ. $M\Delta B\left(M = 90°,\ B = 30°\right)$: $M\Delta = \frac{\Delta B}{2} \Leftrightarrow \Delta B = 2M\Delta$.

Αλλά $A\Delta = M\Delta$, οπότε είναι : $\Delta B + A\Delta = 3M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \frac{AB}{3}$.

Άσκηση 25

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ όπου ΔΓ//ΑΒ και ΔΓ = 4ΑΒ.

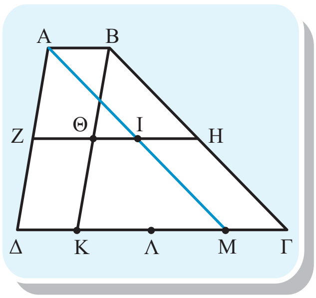
i. Να δείξετε ότι $ZH = \frac{5AB}{2}$ όπου ΖΗ η διάμεσος.

ii. Αν Κ,Λ,Μ σημεία της ΔΓ τέτοια ώστε ΔΚ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΓ, να δείξετε ότι ΑΒΚΔ, ΑΒΓΜ παραλληλόγραμμα.

iii. Αν η διάμεσος του τραπεζίου τέμνει τις ΒΚ, ΑΜ στα Θ, Ι να δείξετε ότι $\Theta I = \frac{AB}{2}$.

Λύση

i. Είναι $ZH = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{AB + 4AB}{2} = \frac{5AB}{2}$.



ii. Είναι $\Delta K = \frac{1}{4}\Delta\Gamma = AB$ και αφού ΑΒ//ΔΚ θα είναι το ΑΒΚΔ παραλληλόγραμμο.

Είναι $M\Gamma = \frac{1}{4}\Delta\Gamma = AB$ και αφού ΑΒ//ΜΓ θα είναι το ΑΒΓΜ παραλληλόγραμμο.

iii. Αφού ΖΗ διάμεσος τότε και Θ,Ι τα μέσα των ΒΚ, ΑΜ.

Άρα και ΖΘ// = ΑΒ, ΙΗ// = ΑΒ.

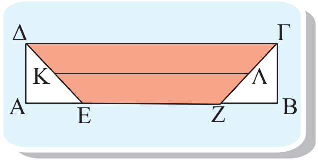
Οπότε $\Theta I = ZH - Z\Theta - IH = \frac{5AB}{2} - AB - AB = \frac{AB}{2}$.

Άσκηση 26

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4ΒΓ. Θεωρούμε σημεία Ε, Ζ επί της ΑΒ τέτοια ώστε ΑΕ = ΖΒ = ΒΓ.
i. Να δείξετε ότι το ΔΕΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
ii. Να βρεθεί η διάμεσός του ΚΛ συναρτήσει της ΒΓ.

Λύση

i. Είναι ΑΒ//ΔΓ άρα και ΕΖ//ΔΓ. Δηλαδή το ΔΕΖΓ είναι τραπέζιο. Για να είναι ισοσκελές τραπέζιο αρκεί ΔΕ = ΖΓ.



Είναι $A\hat{\Delta}E = B\hat{Z}\Gamma$ αφού είναι ορθογώνια και έχουν ΑΔ = ΒΓ και ΑΕ = ΖΒ.
Συνεπώς ΔΕ = ΖΓ.

ii. Αν ΚΛ η διάμεσος του τραπεζίου, τότε $K\Lambda = \frac{B+\beta}{2} = \frac{\Delta\Gamma + EZ}{2}$.

Όμως ΔΓ = ΑΒ = 4ΒΓ
και ΕΖ = ΑΒ – ΑΕ – ΖΒ = 4ΒΓ – ΒΓ – ΒΓ = 2ΒΓ.

Άρα $K\Lambda = \frac{4B\Gamma + 2B\Gamma}{2} = \frac{6B\Gamma}{2} = 3B\Gamma$.

Άσκηση 27

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Μ μέσο της υποτείνουσας. Αν ΜΕ, ΜΔ οι αποστάσεις του Μ από τις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι το ΜΕΑΔ είναι ορθογώνιο.

Λύση

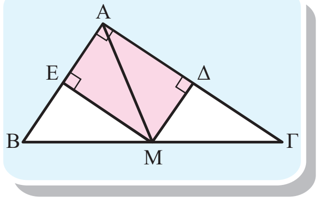
1ος τρόπος

Στο τετράπλευρο $ME\hat{A}\Delta$ έχουμε τρεις ορθές γωνίες $\hat{E} = \hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$. Άρα το ΜΕΑΔ είναι ορθογώνιο.

2ος τρόπος

$AM = \frac{B\Gamma}{2} \left\langle \begin{array}{l} AM = BM \\ AM = M\Gamma \end{array} \right.$ αφού ΑΜ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΒ το ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε $ME // = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow ME // = A\Delta$

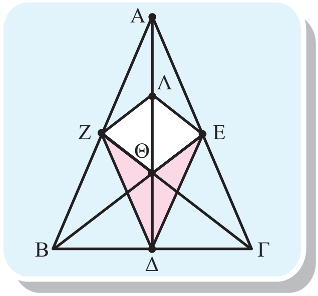


Τότε ΜΕΑΔ παραλληλόγραμμο και αφού έχει γωνία ορθή θα είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 28

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Θ το βαρύκεντρό του και Δ, Ζ, Ε μέσα των ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
i. Να δείξετε ότι ΑΖΔΕ ρόμβος.
ii. Αν Λ το μέσο της ΑΘ, να δείξετε ότι ΛΖΘΕ ρόμβος.

Λύση



i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ζ μέσο ΑΒ}\\ \text{Δ μέσο ΒΓ}\end{array}\right\}\ \text{άρα } ΖΔ // = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΖΔ // = ΑΕ$$

Συνεπώς το ΑΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.
Όμως ΑΖ = ΑΕ ως μισά ίσων τμημάτων.
Άρα ΑΖ = ΖΔ = ΔΕ = ΕΑ. Δηλαδή ΑΖΔΕ ρόμβος.

ii. Στο τρίγωνο ΑΘΓ $\left.\begin{array}{l}\text{Λ μέσο ΑΘ}\\ \text{Ε μέσο ΑΓ}\end{array}\right\} \Leftrightarrow ΛΕ // = \frac{ΘΓ}{2}$.

Είναι $ΘΓ = \frac{2}{3}ΓΖ$ (ιδιότητα βαρύκεντρου) Άρα $ΛΕ = \frac{ΘΓ}{2} = \frac{\frac{2}{3}ΓΖ}{2} = \frac{1}{3}ΓΖ$.

Όμως $ΘΖ = \frac{1}{3}ΓΖ$.

Άρα ΛΕ// = ΘΖ δηλαδή το ΛΖΘΕ είναι παραλληλόγραμμο.

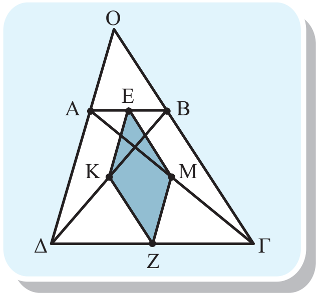
Επιπλέον $ΖΘ = \frac{1}{3}ΓΖ$ και $ΘΕ = \frac{1}{3}ΒΕ$ και αφού ΓΖ = ΒΕ (ως διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές) θα είναι και ΖΘ = ΘΕ. Άρα ΛΖΘΕ ρόμβος (παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες).

Άσκηση 29

Τραπεζίου ΑΒΓΔ οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ο. Αν Κ, Μ μέσα των διαγωνίων και Ε, Ζ μέσα των βάσεων, να δείξετε ότι $\hat{ΚΕΜ} = \hat{ΚΖΜ} = \hat{Ο}$.

Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΔ: $\left.\begin{array}{l}\text{Ε μέσο ΑΒ}\\ \text{Κ μέσο ΔΒ}\end{array}\right\}$ άρα $ΚΕ // = \frac{ΑΔ}{2}$, συνεπώς ΚΕ // ΟΔ .



Στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$\left.\begin{matrix} \text{Ε μέσο ΑΒ} \\ \text{Μ μέσο ΑΓ} \end{matrix}\right\}$ άρα $EM // = \dfrac{B\Gamma}{2}$ (1), συνεπώς $EM // B\Gamma$.

Οι γωνίες $\hat{O}$, $K\hat{E}M$ έχουν πλευρές παράλληλες άρα

$\hat{O} = K\hat{E}M$ (αφού είναι και οι δύο οξείες).

Στο τρίγωνο ΔΒΓ $\left.\begin{matrix} \text{Κ μέσο ΔΒ} \\ \text{Ζ μέσο ΔΓ} \end{matrix}\right\}$ άρα $KZ // = \dfrac{B\Gamma}{2}$ (2).

Από (1),(2) ισχύει $KZ // = EM$, άρα ΚΕΜΖ παραλληλόγραμμο.

οπότε $K\hat{Z}M = K\hat{E}M = \hat{O}$.

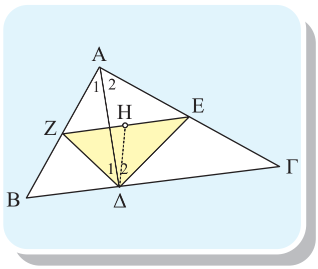
Άσκηση 30

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$, είναι Ζ, Ε μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, ΑΔ ύψος και Η μέσο ΖΕ. Να δείξετε ότι:

i. $\Delta H = \dfrac{B\Gamma}{4}$

ii. Η περίμετρος του τριγώνου ΕΔΖ είναι ίση με το μισό της περιμέτρου του ΑΒΓ.

Λύση



i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ $\left.\begin{matrix} \text{Ζ μέσο ΑΒ} \\ \text{Ε μέσο ΑΓ} \end{matrix}\right\}$ άρα $ZE = \dfrac{B\Gamma}{2}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, το Ζ είναι μέσο της υποτείνουσας άρα $\Delta Z = \dfrac{AB}{2} = AZ$

Άρα το τρίγωνο ΔΖΑ είναι ισοσκελές με $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, το Ε είναι μέσο της υποτείνουσας άρα $\Delta E = \dfrac{A\Gamma}{2} = AE$

Άρα το τρίγωνο ΔΕΑ είναι ισοσκελές με $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}_2$

Οπότε $Z\hat{\Delta}E = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $Z\hat{\Delta}E$ το Η είναι μέσο της υποτείνουσας ΖΕ

Άρα $\Delta H = \dfrac{ZE}{2} = \dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \dfrac{B\Gamma}{4}$

ii. Η περίμετρος του τριγώνου ΔΖΕ είναι: $ΔΖ + ΖΕ + ΕΔ = \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ}{2}$.

Άσκηση 31

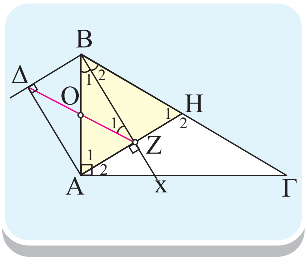
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΒΓ είναι η διπλάσια από την ΑΒ. Προβάλουμε το Α στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της Β. Αν Ζ, Δ οι προβολές αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

i. ΔΖ//ΒΓ

ii. Ζ μέσο της ΑΗ και Η μέσο της ΒΓ(όπου Η το σημείο στο οποίο η ΑΖ τέμνει τη ΒΓ)

iii. Να βρεθούν οι γωνίες των τριγώνων ΑΒΗ και ΑΗΓ.

Λύση



i. Το ΔΒΖΑ έχει τρείς ορθές γωνίες: $\hat{Z} = \hat{Δ} = \hat{B} = 90^o$

(Είναι $\hat{B} = 90^\circ$ αφού οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών σχηματίζουν ορθή γωνία).

Άρα ΔΒΖΑ ορθογώνιο, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{Z}_1$ (1) αφού ΟΒ = ΟΖ.

(οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες)

Όμως $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ (2) άφου Βx εσωτερική διχοτόμος της $\hat{B}$.

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{B}_2 = \hat{Z}_1$. Τότε ΒΓ//ΔΖ αφού τεμνόμενες από τη Βx σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΗ η ΒΖ είναι διχοτόμος ($\hat{B}_1 = \hat{B}_2$), αλλά και ύψος (αφού $ΒΖ \perp ΑΗ$)

Άρα είναι ισοσκελές και Ζ μέσο της ΑΗ.

Αφού το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές θα είναι $ΑΒ = ΒΗ \overset{ΑΒ=\frac{ΒΓ}{2}}{\Leftrightarrow} \frac{ΒΓ}{2} = ΒΗ$.

Άρα Η μέσο της ΒΓ.

iii. $ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow \hat{Γ} = 30^\circ$

Άρα στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 90^\circ - \hat{Γ} = 60^\circ$

Οπότε αφού το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές θα ισχύει:

$$\hat{A}_1 = \hat{H}_1 = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

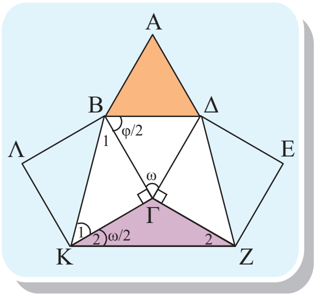
$$\hat{A}_2 = 90^\circ - \hat{A}_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\hat{H}_2 = 180^\circ - \hat{H}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Άσκηση 32

Εξωτερικά του ρόμβου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΓΔΕΖ και ΒΓΚΛ. Να δείξετε ότι το ΚΖΔΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



Για να είναι τραπέζιο αρκεί ΒΔ//ΚΖ.

Αν $A\hat{B}\Gamma = \varphi$ και $B\hat{\Gamma}\Delta = \omega$ τότε $\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\varphi}{2}$, αφού ΒΔ διχοτόμος της $A\hat{B}\Gamma$.

Είναι $\hat{B}_1 = \hat{K}_1 = 45^\circ$ αφού ΒΚ διαγώνιος του τετραγώνου ΒΓΚΛ.

Είναι $K\hat{\Gamma}Z = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \omega = 180^\circ - \omega$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΚΖ:

$$\hat{K}_2 = \hat{Z}_2 = \frac{180^\circ - K\hat{\Gamma}Z}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \omega)}{2} = \frac{180^\circ - 180^\circ + \omega}{2} = \frac{\omega}{2}$$

Άρα $K\hat{B}\Delta + B\hat{K}Z = 45^\circ + \frac{\varphi}{2} + 45^\circ + \frac{\omega}{2} = 90^\circ + \frac{\varphi}{2} + \frac{\omega}{2} = 90^\circ + \frac{\varphi + \omega}{2}$

Όμως στο ρόμβο ΑΒΓΔ είναι $\varphi + \omega = 180^\circ$

Άρα $K\hat{B}\Delta + B\hat{K}Z = 90^\circ + \frac{180^\circ}{2} = 180^\circ$

Αφού οι ΒΔ, ΚΖ τεμνόμενες από την ΒΚ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές, τότε ΒΔ//ΚΖ, δηλαδή ΚΖΔΒ τραπέζιο.
Είναι ισοσκελές αφού ΒΚ = ΔΖ ως διαγώνιες των ίσων τετραγώνων.

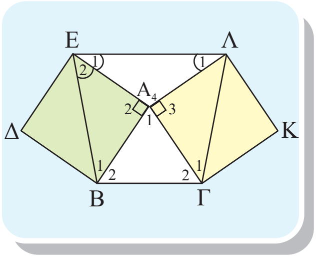
Άσκηση 33

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΓΚΛ και ΑΒΔΕ

i. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου $\overset{\Delta}{AE\Lambda}$
ii. Να δείξετε ότι το ΒΓΛΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

i. Είναι $\hat{A}_4 = 360^o - \hat{A}_2 - \hat{A}_3 - \hat{A}_1 = 360^o - 90^o - 60^o - 90^o = 120^o$



Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AE\Lambda}}$ είναι ισοσκελές αφού ΑΕ = ΑΛ ως πλευρές των ίσων τετραγώνων ΑΓΚΛ και ΑΒΔΕ.

Άρα $\hat{E}_1 + \hat{\Lambda}_1 + \hat{A}_4 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E}_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$2\hat{E}_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{E}_1 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Άρα $\hat{A}_4 = 120^\circ$, $\hat{E}_1 = 30^\circ$, $\hat{\Lambda}_1 = 30^\circ$

ii. Είναι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$

($\hat{B}_1 = 45^\circ$ αφού η ΒΕ διχοτόμος της $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 90^\circ$

$\hat{B}_2 = 60^\circ$ ως γωνία του ισόπλευρου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$)

Είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Lambda = \hat{E}_2 + \hat{E}_1 = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

$\hat{E}_2 = 45^\circ$ αφού η ΒΕ διχοτόμος της $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = 90^\circ$

Οι γωνίες $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$, $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Lambda$ είναι παραπληρωματικές αφού

$\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Lambda = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$

Άρα ΕΛ//ΒΓ αφού τέμνονται από την ΕΒ και σχηματίζουν τις εντός και επί τ'αυτά γωνίες παραπληρωματικές.

Τότε ΒΕΛΓ τραπέζιο και μάλιστα ισοσκελές αφού ΒΕ = ΓΛ ως διαγώνιες των ίσων τετραγώνων ΑΓΚΛ και ΑΒΔΕ.

Άσκηση 34

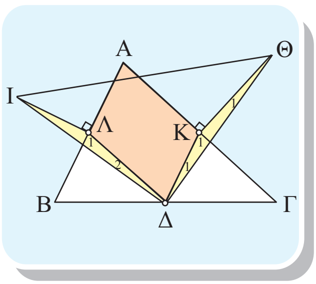
Στα μέσα Κ, Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε $\mathrm{K\Theta} \perp \mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{\Lambda I} \perp \mathrm{AB}$ ώστε $\mathrm{K\Theta} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$ και $\mathrm{\Lambda I} = \frac{\mathrm{AB}}{2}$.

Αν Δ μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι ΙΘΔ ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση

Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ $\left.\begin{matrix}\Lambda \text{ μέσο } \mathrm{AB} \\ \Delta \text{ μέσο } \mathrm{B\Gamma}\end{matrix}\right\}$ Άρα $\Lambda\Delta // = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \mathrm{K\Theta}$

$\left.\begin{matrix}\mathrm{K} \text{ μέσο } \mathrm{A\Gamma} \\ \Delta \text{ μέσο } \mathrm{B\Gamma}\end{matrix}\right\}$ Άρα $\mathrm{K}\Delta // = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \Lambda\mathrm{I}$



Είναι $\mathrm{I}\hat{\Lambda}\Delta = 90^\circ + \hat{\Lambda}_1$. Όμως $\hat{\Lambda}_1 = \hat{A}$ ως εντός, εκτός και επί τ'αυτά των παραλλήλων ΛΔ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Άρα $\mathrm{I}\hat{\Lambda}\Delta = 90^\circ + \hat{A}$ (1)

Είναι $\Theta\hat{K}\Delta = 90^o + \hat{K}_1$. Όμως $\hat{K}_1 = \hat{A}$ ως εντός, εκτός και επί τ' αυτά των παραλλήλων ΚΔ, ΑΒ που τέμνονται από την ΑΓ. Άρα $\Theta\hat{K}\Delta = 90^o + \hat{A}$ (2)

Από (1), (2) θα έχουμε $I\hat{\Lambda}\Delta = \Theta\hat{K}\Delta$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $I\overset{\Delta}{\Lambda}\Delta$ και $K\overset{\Delta}{\Delta}\Theta$. Αυτά έχουν ΛΙ = ΚΔ, ΛΔ = ΚΘ, $I\hat{\Lambda}\Delta = \Theta\hat{K}\Delta$

Άρα $I\overset{\Delta}{\Lambda}\Delta = K\overset{\Delta}{\Delta}O$ (Π - Γ - Π). Επομένως ΙΔ = ΘΔ, δηλαδή $I\overset{\Delta}{\Delta}\Theta$ ισοσκελές.

Στο $\Delta\overset{\Delta}{K}\Theta$: $\hat{\Delta}_1 + \Theta\hat{K}\Delta + \hat{\Theta}_1 = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + 90^o + \hat{K}_1 + \hat{\Theta}_1 = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + \hat{K}_1 + \hat{\Theta}_1 = 90^o \overset{\hat{K}_1 = \hat{A}}{\Leftrightarrow} \hat{\Delta}_1 + \hat{A} + \hat{\Theta}_1 = 90^o$ (3)

Όμως $\hat{A} = \Lambda\hat{\Delta}K$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΛΔΚ $\left(\Delta K // = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow \Delta K // = A\Lambda\right)$ και $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Delta}_2$ από την ισότητα των τριγώνων $I\overset{\Delta}{\Lambda}\Delta$ και $K\overset{\Delta}{\Delta}\Theta$.

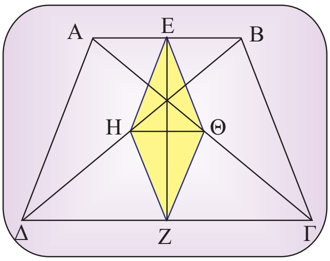
Άρα: (3) $\Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 + \Lambda\hat{\Delta}K + \hat{\Delta}_2 = 90^o \Leftrightarrow I\overset{\Delta}{\Delta}\Theta = 90^o$

Άσκηση 14

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι: $EZ \perp H\Theta$.

Λύση

Για να δείξουμε ότι $EZ \perp H\Theta$ αρκεί να δείξουμε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος, δηλαδή $EH = // \Theta Z$ και $EH = E\Theta$. Στο τρίγωνο ΑΒΔ τα Ε, Η είναι μέσα των ΑΒ και ΒΔ αντίστοιχα, οπότε $EH = // \frac{A\Delta}{2}$ (1).



Ομοίως στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\Theta Z = // \frac{A\Delta}{2}$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι: $EH = // \Theta Z$, δηλαδή το ΕΘΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ε, Θ είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε $E\Theta = // \frac{B\Gamma}{2}$ (3).

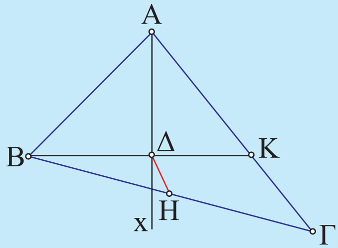
Όμως, το τραπέζιο είναι ισοσκελές, οπότε $A\Delta = B\Gamma$ (4).

Από τις (1), (3) και (4) έχουμε: $EH = E\Theta$.

Άρα το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος και $EZ \perp H\Theta$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

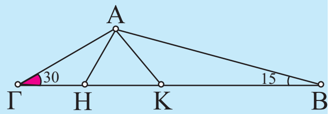
1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ φέρνουμε τη διχοτόμο Αx της γωνίας $\hat{A}$ και την ΒΔ κάθετη στην Αx. Αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Κ και Η είναι το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι ισχύουν :



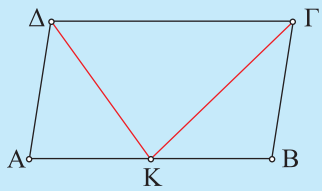
α. $ΔΗ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$ **β.** $Δ\hat{Β}Γ = \frac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}$

γ. $Β\hat{Δ}Η = 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$.

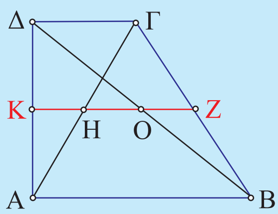
2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\hat{Γ} = 30^o$ και $\hat{A} = 135^o$,φέρνουμε την κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α, που τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η. Να δειχθεί ότι η ΑΓ είναι ίση με το μισό της ΒΗ.



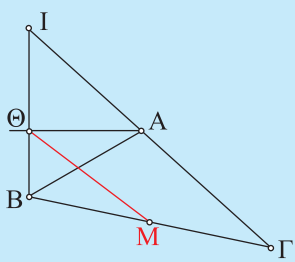
3. Θεωρούμε παρ/μο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2·ΒΓ. Αν Κ είναι το μέσο της ΑΒ, να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΔΚΓ είναι ορθογώνιο στο Κ.



4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔμε ΑΒ//ΓΔ και τέτοιο ώστε ΑΒ = 2·ΓΔ. Να δειχθεί ότι οι διαγώνιοι ΒΔ και ΑΓ τριχοτομούν τη διάμεσο ΚΖ του τραπεζίου, δηλ. ΚΗ = ΗΟ = ΟΖ.



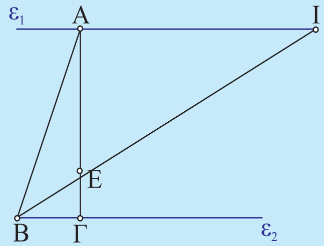
5. Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ, φέρνουμε ευθεία κάθετη στην εξωτερική διχοτόμο της Α, που τέμνει τη διχοτόμο στο Θ και την προέκταση της ΓΑ στο Ι. Αν είναι Μ το μέσο της ΒΓ, να δειχθεί ότι:



α. ΓΙ = ΑΓ + ΑΒ **β.** $ΘΜ = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$

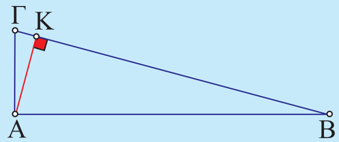
γ. $Β\hat{Θ}Μ = \frac{\hat{A}}{2}$

6. Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$.Από ένα σημείο Α της $ε_1$ φέρνουμε την ΑΓ κάθετη στην $ε_2$ και την ΑΒ πλάγια. Αν η ευθεία ΒΕ τέμνει την $ε_1$ στο Ι έτσι ώστε $ΕΙ = 2 \cdot ΑΒ$, να δειχθεί ότι $Α\hat{Β}Γ = 3 \cdot Ε\hat{Β}Γ$.

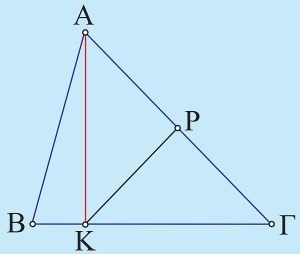


7. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{Β} = 15^ο$. Φέρνουμε το ύψος ΑΚ. Να δειχθεί η ισοδυναμία

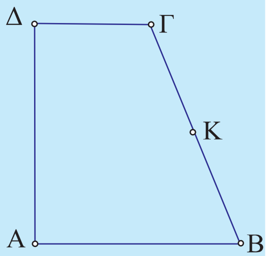
$$\hat{Β} = 15^ο \Leftrightarrow ΑΚ = \frac{ΒΓ}{4}$$



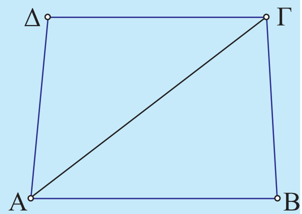
8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{Β} = 2\hat{Γ}$. Η παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας Β από το μέσο Ρ της ΑΓ, τέμνει τη ΒΓ ή την προέκτασή της στο σημείο Κ. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ορθογώνιο.



9. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^ο$ και $ΒΓ = 2 \cdot ΔΓ$. Αν Κ το μέσο της ΒΓ να δειχθεί ότι $Α\hat{Κ}Γ = 3 \cdot Κ\hat{Α}Β$.



10. Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες με τη μικρή βάση και η διαγώνιος ΑΓ με τη μεγάλη βάση ΑΒ. Να βρεθούν οι γωνίες του τραπεζίου.



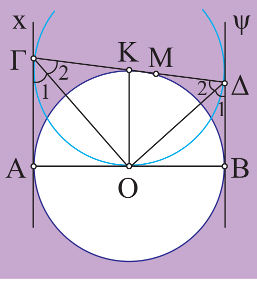
Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ φέρνουμε τις κάθετες ΑΕ,ΒΖ απο τις τρείς κορυφές στην πλευρά ΓΔ και την κάθετη ΟΟ΄ απο το κέντρο Ο του τετραπλεύρου που ορίζουν τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ πρός την ΓΔ (το Ο ανήκει στην ΓΔ). Να δείξετε ότι ΑΕ + ΒΖ = 4 ΟΟ΄.

$6^{ο}$ Κεφάλαιο

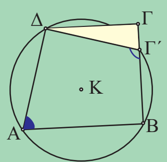
$9^{ο}$ μάθημα

Κύκλος



$10^{ο}$ μάθημα

Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα



Μάθημα 9

Κύκλος

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

Ορισμοί

i) Μια γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη** σε κύκλο, όταν η κορυφή της είναι πάνω στον κύκλο και οι πλευρές της χορδές του.

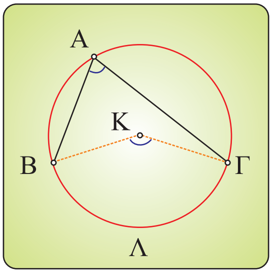
π.χ. η $\hat{A}$.

ii) Το τόξο που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της εγγεγραμμένης λέγεται αντίστοιχο τόξο αυτής.

π.χ. το $\overset{\frown}{B\Lambda\Gamma}$.

iii) Η επίκεντρη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο με την εγγεγραμμένη λέγεται αντίστοιχη επίκεντρη της εγγεγραμμένης.

π.χ. η $B\hat{K}\Gamma$ είναι η αντίστοιχη **επίκεντρη** της $\hat{A}$.



Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.

Απόδειξη

Από το ισοσκελές τριγ. ΚΑΒ έχουμε:

$$\hat{K}_1 = x + x \Rightarrow \hat{K} = 2\hat{x} \ (1)$$

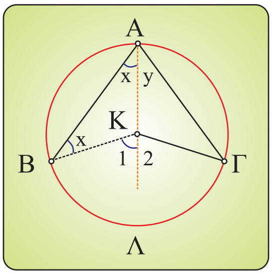
Όμοια από το ισοσκελές $K\hat{A}\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{K}_2 = \hat{\psi} + \hat{\psi} \Rightarrow \hat{K}_2 = 2\hat{\psi} \ (2)$$

Προσθέτουμε τις (1), (2) και έχουμε:

$$\hat{K}_1 + \hat{K}_2 = 2\hat{x} + 2\hat{\psi} \Rightarrow B\hat{K}\Gamma = 2(x+\psi) \Rightarrow B\hat{K}\Gamma = 2B\hat{A}\Gamma$$

$$\Rightarrow B\hat{A}\Gamma = \frac{B\hat{K}\Gamma}{2}.$$



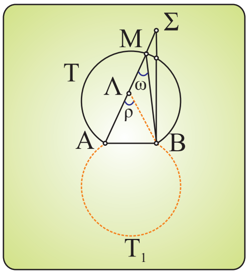
Πόρισμα Ι.

Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους ίσες εγγεγραμμένες βαίνουν σε ίσα τόξα και αντίστροφα.

Πόρισμα ΙΙ.
Κάθε εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.
Πόρισμα ΙΙΙ.
Κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε τόξο μικρότερο από ημικύκλιο είναι οξεία, ενώ κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε τόξο μεγαλύτερο από ημικύκλιο είναι αμβλεία.

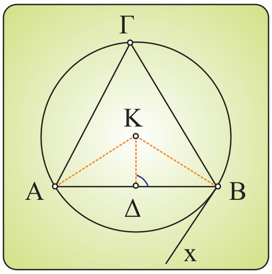
Παρατήρηση

Έστω ένα τόξο $\overset{\frown}{ATB}$ και ΑΒ η χορδή του. Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία του τόξου $\overset{\frown}{ATB}$ (και του συμμετρικού του ως προς ΑΒ) έχουν την ιδιότητα να βλέπουν το ΑΒ υπό την ίδια γωνία $\hat{\omega}$. Τα σημεία Λ που είναι εσωτερικά του κυκλικού τμήματος βλέπουν το ΑΒ υπό γωνία $\hat{\rho}$ μεγαλύτερη της $\hat{\omega}$ ($\hat{\rho} > \hat{\omega}$ ως εξωτερική του τριγ. ΒΛΜ). Τα σημεία Σ που είναι εξωτερικά του κυκλικού τμήματος, βλέπουν το ΑΒ υπό γωνία $\hat{\nu} < \hat{\omega}$ (γιατί $\hat{\omega}$ εξωτερική του τριγ. ΒΜΣ). Επειδή τα σημεία του τόξου $\overset{\frown}{AT_1B}$) έχουν μια κοινή ιδιότητα που ανήκει σ' αυτά και μόνο αυτά αποτελούν ένα γεωμετρικό τόπο.



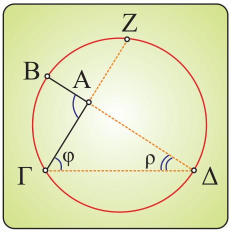
Θεώρημα
Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου που φέρνουμε στο ένα άκρο της χορδής, είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο που περιέχεται μέσα σ' αυτή.
Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $\hat{\Gamma} = \frac{A\hat{K}B}{2} \Rightarrow \hat{\Gamma} = \Delta\hat{K}B \; (1)$. Επειδή $K\Delta \perp AB$ (διχοτόμος του ισοσκ. ΑΚΒ) και $KB \perp Bx$ (εφαπτομένη και ακτίνα) έπεται $A\hat{B}x = \Delta\hat{K}B \; (2)$. Από τις (1), (2) έπεται $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}x$.



Θεώρημα
Αν μια γωνία έχει την κορυφή της μέσα στον κύκλο, είναι ίση με το άθροισμα δύο εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα, που ορίζονται από τις πλευρές της και τις προεκτάσεις τους.
Απόδειξη

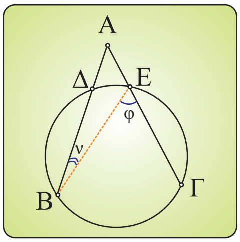
Έστω η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που έχει την κορυφή της μέσα στον κύκλο. Φέρνουμε την ΓΔ, τότε $B\hat{A}\Gamma = \hat{\varphi} + \hat{\rho}$ ως εξωτερική του τριγ. ΑΓΔ.



Θεώρημα

Αν μια γωνία έχει την κορυφή της έξω από τον κύκλο και οι πλευρές της τον τέμνουν είναι ίση με τη διαφορά δύο εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχονται μεταξύ των πλευρών της.

Απόδειξη



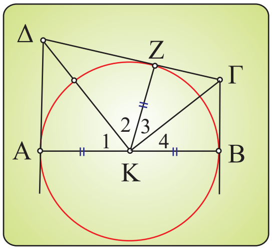
Έστω γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που έχει την κορυφή της έξω από τον κύκλο, φέρνουμε την ΒΕ, τότε $\hat{\varphi} = \hat{A} + \hat{\nu}$ (ως εξωτερική του τριγώνου ΒΑΕ), άρα $\hat{A} = \hat{\varphi} - \hat{\nu}$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Οι ευθείες που ενώνουν το κέντρο ενός κύκλου με τις τομές δύο παραλλήλων εφαπτομένων από τρίτη εφαπτομένη είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση



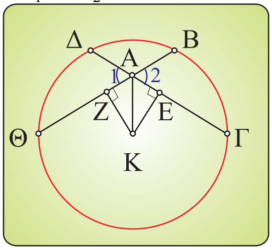
Φέρνουμε την ΚΖ και τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΚΖΔ είναι ίσα, από την ισότητα έχουμε $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ δηλαδή η ΚΔ διχοτόμος της γωνίας $A\hat{K}Z$. Όμοια τα τρίγ. ΚΖΓ και ΚΒΓ είναι ίσα και άρα $\hat{K}_3 = \hat{K}_4$ επομένως η ΚΓ διχοτόμος της $Z\hat{K}B$, οι διχοτόμοι όμως των εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών τέμνονται κάθετα.

Εφαρμογή 2

Δύο ίσες χορδές τέμνονται μέσα στο κύκλο (Κ,Α) στο σημείο Α. Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ΚΑ και ότι τμήματα αυτών είναι ανά δύο ίσα.

Λύση

Έστω ΘΒ, ΔΓ δύο ίσες χορδές που τέμνονται στο Α, θα δείξουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $A\Theta = A\Gamma$.

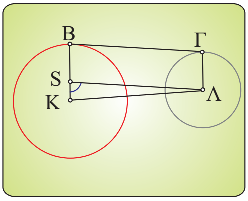


Από το Κ φέρνουμε τις ΚΖ, ΚΕ κάθετες προς τις ΘΒ, ΓΔ τότε $KZ = KE$ (1) γιατί το κέντρο απέχει ίσα από τις ίσες χορδές. Τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΑΕ είναι ίσα ($KA = KA$, $\hat{Z} = \hat{E} = 1$, ορθ. και $KZ = KE$) από την ισότητα των τριγώνων έπεται $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $ZA = AE$ (2). Επειδή $Z\Theta = E\Gamma$ (3) σαν μισά των ΑΒ, ΓΔ έπεται από τις (2), (3) $\Theta A = A\Gamma$.

Εφαρμογή 3

Να αποδείξετε ότι η κοινή εφαπτομένη δύο άνισων κύκλων είναι μικρότερη από τη διάκεντρο τους.

Λύση

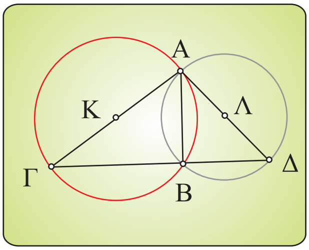


Έστω ΒΓ η κοινή εφαπτομένη δύο άνισων κύκλων και ΚΛ η διάκεντρος, θα δείξουμε ότι: $ΒΓ < ΚΛ$. Φέρνουμε τις ακτίνες ΚΒ, ΛΓ τότε $ΚΒ \parallel ΛΓ$ γιατί είναι κάθετες στη ΒΓ. Από το Λ φέρνουμε παράλληλο προς την ΒΓ.Τότε $ΒΓ = ΛS$, αλλά $ΛS < ΚΛ$ από το ορθογώνιο ΚΛS, άρα $ΒΓ < ΚΛ$.

Εφαρμογή 4

Δύο κύκλοι τέμνονται στα Α, Β.Αν Γ, Δ τα διαμετρικά σημεία του Α, να αποδείξετε ότι ΓΒΔ είναι ευθεία.

Λύση

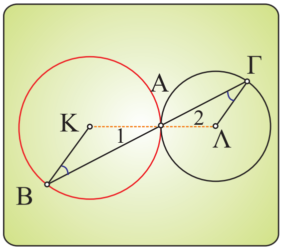


Φέρνουμε την κοινή χορδή ΑΒ οπότε: $Α\hat{Β}Γ = 90^o$ γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Όμοια $Α\hat{Β}Δ = 90^o$ άρα ΓΒΔ ευθεία.

Εφαρμογή 5

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Από το Α φέρνουμε μια τυχαία τέμνουσα. Να αποδείξετε ότι οι ακτίνες που καταλήγουν στα άκρα της τέμνουσας είναι παράλληλες.

Λύση



Για να δείξουμε ότι $ΚΒ \parallel ΛΓ$ αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{Β} = \hat{Γ}$. Φέρνουμε την ΚΛ. Αυτή θα περάσει από το Α. Τα τρίγωνα ΚΒΑ και ΛΑΓ είναι ισοσκελή και επομένως θα είναι:

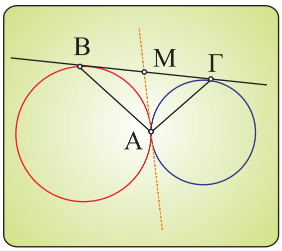
$$\hat{Β} = \hat{Α}_1 \ (1) \text{ και } \hat{Γ} = \hat{Α}_2 \ (2).$$

Επειδή όμως $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2 \ (3)$. Από τις (1), (2) έχουμε $\hat{Β} = \hat{Γ}$ και επομένως $ΚΒ \parallel ΛΓ$.

Εφαρμογή 6

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ η κοινή εξωτερική εφαπτομένη αυτών, να αποδείξετε ότι $Γ\hat{Α}Β = 90^o$.

Λύση

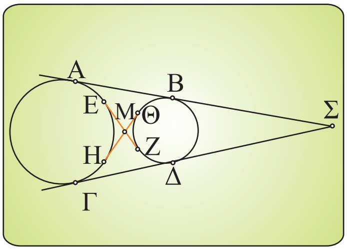


Φέρνουμε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο Α και έστω Μ το σημείο της τομής αυτής με την ΒΓ. Τότε $ΜΒ = ΜΑ$ και $ΜΑ = ΜΓ$ (εφαπτόμενα τμήματα από σημείο προς κύκλο). Άρα $ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ$ και επομένως ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ θα περάσει από το Α οπότε η $\hat{Α}$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο θα είναι ορθή.

Εφαρμογή 7

Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτομένες δύο κύκλων είναι ανά δύο ίσες.

Λύση



Θα αποδείξουμε ότι $AB = \Gamma\Delta$ και $EZ = H\Theta$.

Έχουμε $\Sigma A = \Sigma\Gamma \ (1)$ και $\Sigma B = \Sigma\Delta \ (2)$ (εφαπτομένα τμήματα από σημείο σε κύκλο).

Από τις (1), (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε $AB = \Gamma\Delta$.

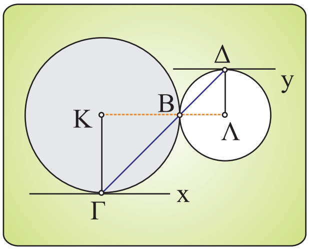
Όμοια $M\Theta = MZ \ (3)$ και $MH = ME \ (4)$

προσθέτουμε τις (3), (4) και έχουμε: $H\Theta = EZ$.

Εφαρμογή 8

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Β. Αν από το Β φέρουμε τυχαία τέμνουσα, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες στα άκρα της τέμνουσας είναι παράλληλες.

Λύση



Έστω ΓΔ μια τέμνουσα και Δψ, Γx οι εφαπτομένες στα άκρα της, θα δείξουμε ότι $\Gamma x \parallel \Delta\psi$.

Φέρνουμε τις ακτίνες ΚΓ, ΓΔ τότε $\Gamma x \perp K\Gamma$ και $\Delta\psi \perp \Lambda\Delta$, επειδή $K\Gamma \parallel \Lambda\Delta$, έπεται ότι $\Gamma x \parallel \Delta\psi$.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

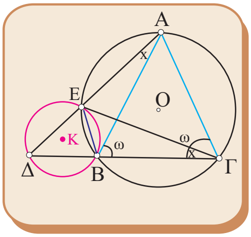
Η Αναλυτική Μέθοδος (Πλάτωνας 430 - 347 π. Χ.)

Οι αποδεικτικές μέθοδοι - συνθετική μέθοδος, η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο και η μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής και της τέλειας επαγωγής - είναι γνωστές από την Άλγεβρα και χρησιμοποιούνται και στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων.
Οι παραπάνω μέθοδοι δεν μας δίνουν ικανοποιητικά στοιχεία για το πως βρέθηκε η απόδειξη μιας πρότασης. Γι' αυτό ακολουθούμε την επόμενη σειρά συλλογισμών που λέγεται **ανάλυση**.
Δεχόμαστε ότι το πρόβλημα ή η ζητούμενη πρόταση αληθεύει και τη μετασχηματίζουμε διαδοχικά με τη βοήθεια γνωστών προτάσεων και θεωρημάτων μέχρι να καταλήξουμε σε μία αληθινή πρόταση ή σε μία πρόταση που δίνεται στην υπόθεση του προβλήματος.
Δηλαδή:
Έστω ότι η ζητούμενη πρόταση είναι η **Π**.
Δεχόμαστε ότι η **Π** είναι αληθινή και τη μετασχηματίζουμε διαδοχικά στις προτάσεις $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_\nu$, όπου η τελευταία πρόταση Π_ν είναι αληθινή ή δοσμένη στην υπόθεση του προβλήματος.
Οι παραπάνω προτάσεις είναι οι προτάσεις της ανάλυσης και διατυπωμένες με αντίστροφη σειρά αποτελούν τη σύνθεση.
Η λύση ενός προβλήματος παρουσιάζεται (διατυπώνεται) σχεδόν πάντοτε με τη σύνθεση.

Παράδειγμα 1

Στον κύκλο (Ο, ρ) παίρνουμε τις χορδές ΑΒ = ΑΓ και φέρνουμε από το Α ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στο Ε και τη ΒΓ στο Δ. Να δειχθεί ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου, που διέρχεται από τα σημεία Β, Δ, Ε.

Λύση



Διατυπώνουμε τις προτάσεις της ανάλυσης:

Π : Δεχόμαστε ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Π_1 : $\widehat{A\Delta B} = \widehat{EBA}$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης)

Π_2 : $\widehat{EBA} = \widehat{E\Gamma A}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΕ)

Π_3 : $\widehat{E\Gamma A} = \omega - x$ (βλ. σχήμα)

Π_4 : $\widehat{A\Delta B} = \omega - x$ (διότι η γωνία ω είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΒ)

Οι παραπάνω προτάσεις μας οδηγούν στη διατύπωση της λύσης η οποία είναι:

$\widehat{A\Delta B} = \omega - x$, διότι η γωνία ω είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΒ και $\widehat{E\Gamma A} = \omega - x$ οπότε $\widehat{A\Delta B} = \widehat{E\Gamma A}$ και $\widehat{A\Delta B} = \widehat{EBA}$, που σημαίνει ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β.

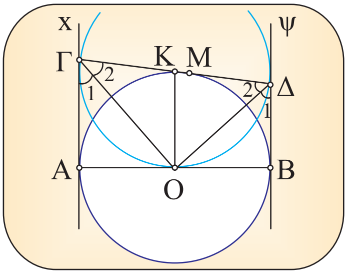
Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Στα άκρα Α, Β διαμέτρου ΑΒ κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε τις ημιεφαπτομένες Αx και Βψ προς το ίδιο ημιεπίπεδο της ΑΒ. Σε σημείο Μ του κύκλου φέρνουμε τρίτη εφαπτομένη, που τέμνει τις Αx, Βψ στα Γ και Δ. Να δειχθεί ότι:

α. $Γ Δ = AΓ + BΔ$, β. $Γ\hat{O}Δ = 90^o$, γ. Ο κύκλος διαμέτρου ΓΔ εφάπτεται της ΑΒ στο κέντρο Ο.

Λύση



α. Είναι $ΓM = ΓA$ και $ΔM = ΔB$.
Άρα $ΓM + ΔM = ΓΔ = AΓ + BΔ$.

β. Είναι $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$ και $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$. Επειδή Αx//Βψ έχουμε:

$$\hat{Γ} + \hat{Δ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Γ}_2 + \hat{Δ}_2 = \frac{\hat{Γ}}{2} + \frac{\hat{Δ}}{2} = 90^o$$

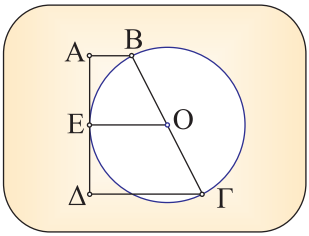
Επομένως $Γ\hat{O}Δ = 90^o$.

γ. Φέρνουμε την ΟΚ//ΑΓ//ΒΔ, οπότε $OK \perp AB$. Επειδή το Ο είναι μέσο της ΑΒ θα είναι το Κ μέσο της ΓΔ. Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΔΓ δηλ. η ΚΟ είναι ίση με $\frac{AΓ + BΔ}{2} = \frac{ΓΔ}{2}$, άρα ο κύκλος $\left(K, \frac{ΓΔ}{2}\right)$ περνά από το Ο. Επειδή $AB \perp KO$, η ΑΒ είναι εφαπτομένη του $\left(K, \frac{ΓΔ}{2}\right)$.

Άσκηση 2

Στο ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(\hat{A} = \hat{Δ} = 90^o\right)$ είναι $BΓ = AB + ΓΔ$. Να δειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ εφάπτεται της ΑΔ.

Λύση

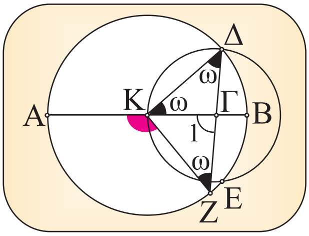


Η διάμεσος ΟΕ του τραπεζίου είναι κάθετη στην ΑΔ- (ΟΕ//ΑΒ//ΓΔ). Επειδή $OE = \frac{AB + ΓΔ}{2} = \frac{BΓ}{2}$, ο κύκλος $\left(O, \frac{BΓ}{2}\right)$ εφάπτεται στην ΑΔ ,αφού η ΑΔ είναι κάθετη στην ΟΕ.

Άσκηση 3

Σε κύκλο με κέντρο Κ φέρνουμε τη διάμετρο ΑΒ. Με κέντρο σημείο Γ της ΚΒ, τέτοιο ώστε ΚΓ > ΓΒ και ακτίνα ΓΚ γράφουμε κύκλο, που τέμνει τον (Κ, ΚΑ) στα Δ και Ε. Αν η ευθεία ΔΓ τέμνει τον κύκλο (Κ,ΚΒ) στο σημείο Ζ, να δείξετε ότι η γωνία $\mathrm{A\hat{K}Z}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\mathrm{B\hat{K}\Delta}$.

Λύση



Επειδή ΚΔ = ΚΖ είναι : $\hat{\Delta} = \hat{Z} = \hat{\omega}$.

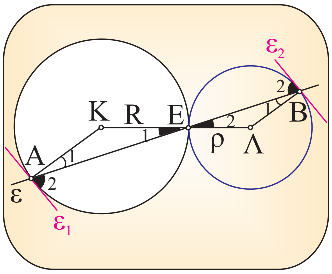
Επειδή ΓΚ = ΓΔ είναι : $\hat{\Delta} = \Delta\hat{K}\Gamma = \hat{\omega}$. Η γωνία ΑΚΖ ως εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΚΓΖ ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι γωνιών , δηλ. είναι:

$$\mathrm{A\hat{K}Z} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{Z} = \hat{\Delta} + \Delta\hat{K}\Gamma + \hat{Z} = \hat{\omega} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 3\hat{\omega}\,.$$

Άσκηση 4

Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Μία ευθεία ε περνάει από το Ε και τέμνει τους κύκλους στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 των κύκλων στα σημεία Α και Β είναι παράλληλες.

Λύση



Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΚΑΕ και ΛΕΒ παίρνουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \hat{B}_1$$

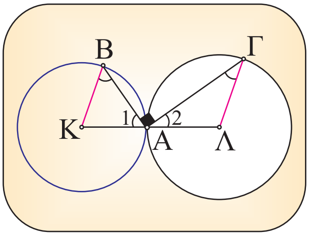
Επομένως $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$, ως συμπληρώματα ίσων γωνιών.

Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Άσκηση 5

Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρνουμε δύο χορδές ΑΒ και ΑΓ των κύκλων κάθετες μεταξύ τους στο Α. Να δειχθεί ότι: ΚΒ//ΛΓ.

Λύση



Επειδή $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 90^o$ είναι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^o$.

Άρα $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \left(\hat{A}_1 = \hat{B},\ \hat{A}_2 = \hat{\Gamma}\right)$.

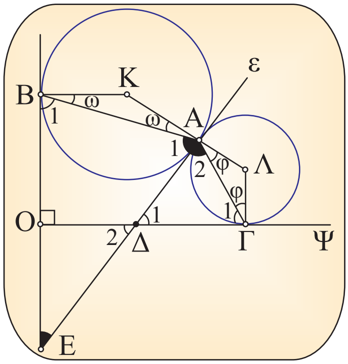
Επειδή $\hat{K} + \hat{B} + \hat{A}_1 + \hat{\Lambda} + \hat{\Gamma} + \hat{A}_2 = 360^o$ έχουμε:

$\hat{K} + \hat{\Lambda} + 90^o + 90^o = 360^o \Leftrightarrow \hat{K} + \hat{\Lambda} = 180^o \Rightarrow \mathrm{KB} // \Gamma\Lambda$
(αφού είναι παραπληρωματικές οι εντός και επί τα αυτά γωνίες των ΚΒ και ΛΓ).

Άσκηση 6

Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α και στις πλευρές της ορθής γωνίας xΟψ, στα σημεία Β και Γ. Να δειχθεί ότι $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 135^o$.

Λύση



Φέρνουμε την κοινή εσωτερική εφαπτόμενη ε, που τέμνει την Οψ στο Δ και την Οx στο Ε. Είναι $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_2$ (διότι ΕΒ = ΕΑ και ΔΑ = ΔΓ ως ίσα εφαπτόμενα τμήματα).

Είναι $\hat{E} = 180^\circ - 2\hat{A}_1$, $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1 = 180^\circ - 2\hat{A}_2$.

Άρα $\hat{E} + \hat{\Delta}_2 = 360^\circ - 2\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right) = 360^\circ - \left(\hat{E} + \hat{\Delta}_2\right) = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

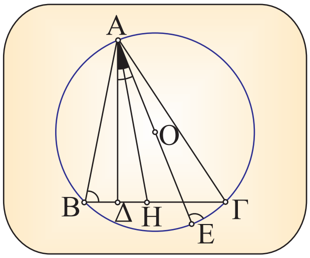
Επομένως $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 135^\circ$ ή $B\hat{A}\Gamma = 135^\circ$.

Άσκηση 7

Οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Β > Γ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Φέρνουμε το ύψος ΑΔ, τη διάμετρο ΑΕ και τη διχοτόμο ΑΗ. Να δειχθεί ότι:

α. $B\hat{A}\Delta = E\hat{A}\Gamma$ **β.** $\Delta\hat{A}H = H\hat{A}E$ **γ.** $\Delta\hat{A}E = \hat{B} - \hat{\Gamma}\ \left(\hat{B} > \hat{\Gamma}\right)$.

Λύση



α. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΕ έχουν $\hat{B} = \hat{E}$ (ως εγγεγραμμένες στο τόξο ΑΓ). Επομένως $B\hat{A}\Delta = E\hat{A}\Gamma$.

β. Είναι $\Delta\hat{A}H = H\hat{A}E$, διότι

$$\Delta\hat{A}H = \frac{\hat{A}}{2} - B\hat{A}\Delta = \frac{\hat{A}}{2} - E\hat{A}\Gamma = H\hat{A}E$$

γ. $\Delta\hat{A}E = 2\cdot\Delta\hat{A}H = 2\left(90^\circ - A\hat{H}\Delta\right) = 180^\circ - 2\left(\frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma}\right) =$

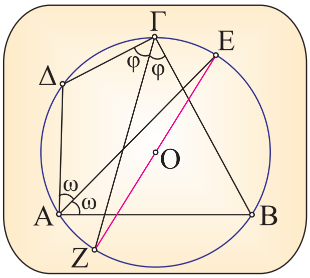
$= \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} - \hat{A} - 2\hat{\Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

Άσκηση 8

Σε κύκλο (Ο,R) παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α,Β,Γ,Δ. Οι διχοτόμοι των εγγεγραμμένων γωνιών Α,Γ τέμνουν το κύκλο στα Ε, Ζ. Να δειχθεί ότι η ΕΖ είναι διάμετρος του κύκλου.

Λύση

Οι εγγεγραμμένες γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ αντιστοιχούν στα τόξα ΒΕΔ και ΔΖΒ. Είναι $\overset{\frown}{BE} = \frac{\overset{\frown}{BE\Delta}}{2}$ και $\overset{\frown}{BZ} = \frac{\overset{\frown}{\Delta ZB}}{2}$.



Άρα $\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{BZ} = \frac{\overset{\frown}{BE\Delta} + \overset{\frown}{\Delta ZB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.

Επομένως η ΕΖ είναι διάμετρος του κύκλου.

Άσκηση 9

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Φέρνουμε την εφαπτομένη στο Α που τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Ε. Φέρνουμε την διχοτόμο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

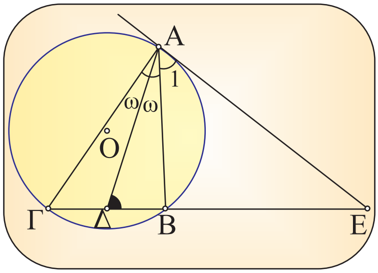
Λύση

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$,ως γωνία χορδής και εφαπτομένης, οπότε

είναι $E\hat{A}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{\omega} = \hat{\Gamma} + \hat{\omega}$.

Όμως $A\hat{\Delta}E = \hat{\omega} + \hat{\Gamma}$,ως εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ

Άρα $E\hat{A}\Delta = A\hat{\Delta}E$ και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.



Άσκηση 10

Έστω κύκλος (Ο,ρ) και ΑΒ διάμετρος . Στο Α φέρνουμε την εφαπτομένη ε και ενώνουμε τυχαίο σημείο Γ της εφαπτομένης με το Β. Η ΒΓ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη στο Δ περνάει από το μέσο Ε του ΑΓ.

Λύση

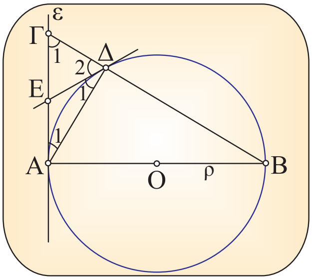
Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο γιατί $A\hat{\Delta}B = 90^o$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο).

$\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$, ως ίσες με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη γωνία Β.

Άρα $AE = \Delta E$.

Επειδή $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1$, ως συμπληρωματικές των $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$ θα είναι

$\Delta E = \Gamma E$. Επομένως $AE = E\Gamma = \dfrac{A\Gamma}{2}$.



Άσκηση 11

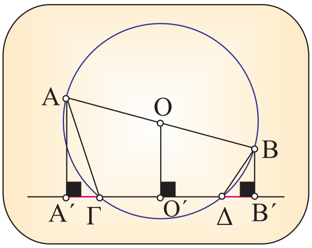
Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και ΓΔ μία χορδή του. Να αποδειχθεί ότι οι χορδές ΑΓ και ΔΒ έχουν ίσες προβολές στην ευθεία ΓΔ.

Λύση

Φέρνουμε $AA' \perp \Gamma\Delta$, $BB' \perp \Gamma\Delta$ και $OO' \perp \Gamma\Delta$. Το Ο είναι το μέσο του Α΄Β΄ ,άρα η ΟΟ΄ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΑΑ΄Β΄Β .Είναι

$$A'\Gamma = A'O' - O'\Gamma \text{ και } B'\Delta = B'O' - O'\Delta.$$

Επομένως $A'\Gamma = B'\Delta$.



Άσκηση 12

Δύο κύκλοι (Κ, ρ) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Α.

Φέρνουμε μια χορδή ΑΒ του κύκλου (Κ, ρ) και την χορδή $A\Gamma \perp AB$ του κύκλου (Λ, ρ). Να δειχθεί ότι ΒΓ//=ΚΛ.

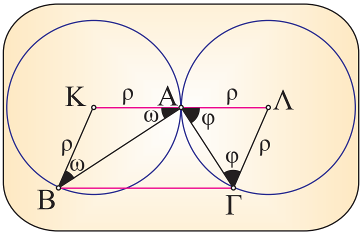
Λύση

Τα τρίγωνα ΚΒΑ και ΑΛΓ είναι ισοσκελή.

Επειδή $B\hat{A}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^o \Leftrightarrow$

$2\hat{\omega} + 2\hat{\varphi} = 180^o \Leftrightarrow \hat{K} + \hat{\Lambda} = 180^o \Leftrightarrow KB // \Gamma\Lambda$.

Επίσης είναι ΚΒ = ΛΓ = ρ. Επομένως το ΚΒΓΛ είναι παραλληλόγραμμο. Ετσι προκύπτει ΒΓ//=ΚΛ.



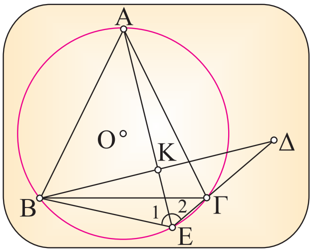
Άσκηση 13

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο,ρ). Στο τόξο ΒΓ, που δεν ανήκει το Α, θεωρούμε σημείο Ε και φέρνουμε την $BK \perp AE$, που τέμνει την προέκταση της ΕΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές.

Λύση

Επειδή $AB = A\Gamma \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma}$,θα είναι $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (1) ,ως εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα.

Άρα η ΕΚ είναι ύψος και διχοτόμος στο τρίγωνο ΒΕΔ. Αυτό σημαίνει ότι το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές.



Άσκηση 14

Θεωούμε δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ κύκλου (Ο,ρ), που τέμνονται στο Ι. Έστω Μ και Ρ τα μέσα των χορδών ΑΔ και ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α. $IM \perp B\Gamma$ και $IP \perp A\Delta$

β. ΟΜ = ΓΒ/2 και ΟΡ = ΑΔ/2.

Λύση

α. Η ΙΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΙΔ , οπότε ΙΜ = ΜΑ και $\hat{A} = A\hat{I}M = E\hat{I}B$.

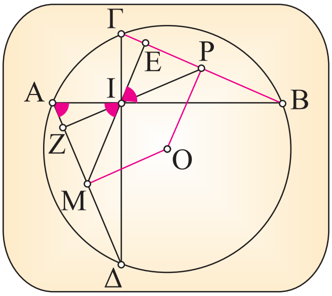
Επειδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (ως εγγεγραμμένες στο $\overset{\frown}{B\Delta}$) και $\hat{\Gamma} + \hat{B} = 90^o$, παίρνουμε $E\hat{I}B + \hat{B} = 90^o$.

Άρα $IM \perp B\Gamma$. Όμοια προκύπτει ότι $IP \perp A\Delta$.

β. Επειδή $OM \perp A\Delta$, είναι ΟΜ//ΙΡ.

Επειδή $OP \perp B\Gamma$, είναι ΟΡ//ΙΕ. Άρα το ΜΟΡΙ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς έχουμε:

$$OM = IP = \frac{B\Gamma}{2} \text{ και } OP = IM = \frac{A\Delta}{2}.$$

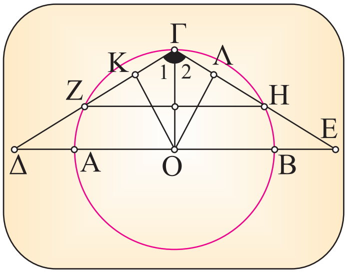


Άσκηση 15

Σε κύκλο με κέντρο Ο, θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και ακτίνα $O\Gamma \perp AB$. Στις προεκτάσεις της διαμέτρου ΑΒ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΒΕ. Οι ΓΔ και ΓΕ, τέμνουν το κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι:

α. ΖΔ = ΗΕ **β. ΖΗ//ΔΕ.**

Λύση



Επειδή ΟΔ = ΟΕ και $ΟΓ \perp ΔΕ$,το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές. Οπότε $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$ και ΓΔ = ΓΕ. Φέρνουμε τις $ΟΚ \perp ΓΔ$ και $ΟΛ \perp ΓΕ$, τότε ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΓ και ΟΛΓ είναι ίσα, (διότι έχουν ΟΓ κοινή υποτείνουσα και $\hat{Γ}_1 = \hat{Γ}_2$). Επομένως ΟΚ = ΟΛ, οπότε είναι ΓΖ = ΓΗ, ως χορδές των αποστημάτων ΟΚ,ΟΛ. Άρα

α. ΖΔ = ΗΕ (ως διαφορές ίσων τμημάτων).

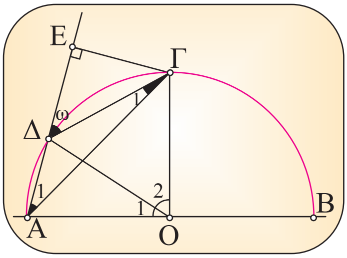
β. Από τα παραπάνω το τρίγωνο ΓΖΗ είναι ισοσκελές, οπότε η διχοτόμος ΓΟ της γωνίας Γ, είναι κάθετη στη ΖΗ. Επειδή $ΓΟ \perp ΖΗ$ και $ΓΟ \perp ΔΕ$ προκύπτει ότι ΖΗ//ΔΕ.

Άσκηση 16

Έστω Γ το μέσο ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ. Αν Δ σημείο του τόξου ΑΓ και Ε η προβολή του Γ στην ευθεία ΑΔ, να δειχθεί ότι: ΓΕ = ΕΔ.

Λύση

Είναι $Α\hat{Ο}Γ = 90^o$. Από το τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε: $\hat{ω} = \hat{Α}_1 + \hat{Γ}_1$,(ως εξωτερική γωνία).



Επειδή $\hat{Α}_1 = \frac{1}{2}\hat{Ο}_2$ και $\hat{Γ}_1 = \frac{1}{2}\hat{Ο}_1$ (Η εγγεγραμμένη είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης), έχουμε:

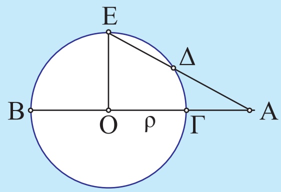
$$\hat{ω} = \frac{1}{2}\hat{Ο}_2 + \frac{1}{2}\hat{Ο}_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\hat{Ο}_1 + \hat{Ο}_2\right) = \frac{1}{2}Α\hat{Ο}Γ = \frac{1}{2}\cdot 90^o = 45^0$$

Άρα το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΔ είναι και ισοσκελές δηλ. ΓΕ = ΕΔ.

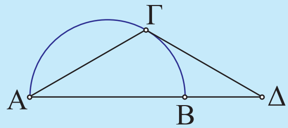
Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε σημείο Α στην προέκταση της διαμέτρου ΒΓ κύκλου (Ο,ρ). Από το Α φέρνουμε την ΑΔΕ, που τέμνει τον κύκλο, έτσι ώστε το ΔΑ να είναι ίσο με την ακτίνα.

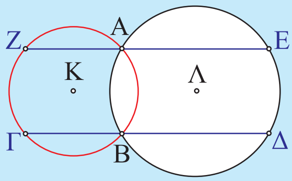
Να αποδείξετε ότι $Ε\hat{Ο}Β = 3Γ\hat{Ο}Δ$.



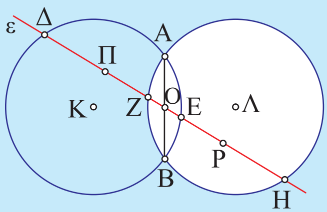
2. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ. Φέρνουμε χορδή ΑΓ έτσι ώστε $Γ\hat{Α}Β = 30^{o}$. Στο σημείο Γ φέρνουμε την εφαπτόμενη, που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Δ. Να δειχθεί ότι ΑΓ = ΓΔ.



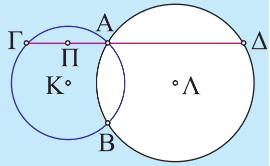
3. Γράφουμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) που τέμνονται στα Α και Β. Αν Γ, Δ τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α προς τους δύο κύκλους και Ζ, Ε τα αντιδιαμετρικά σημεία του Β, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



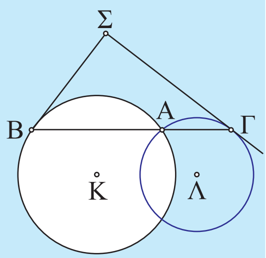
4. Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ και Λ που τέμνονται στα Α και Β. Γράφουμε τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από το μέσον Ο της ΑΒ και τέμνει τον κύκλο Κ στα σημεία Δ, Ε και τον κύκλο Λ στα Ζ και Η (το Ζ ανήκει στην ΔΕ και το Ε στην ΖΗ).
Δείξτε ότι ΟΕ = ΟΖ.



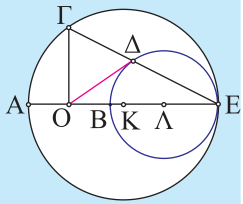
5. Γράφουμε δύο κύκλους με κέντρα Κ και Λ που τέμνονται στα Α και Β. Από το Α φέρνουμε παράλληλη στη διάκεντρο ΚΛ, που τέμνει τους κύκλους στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η ΓΔ έχει διπλάσιο μήκος απο την ΚΛ.



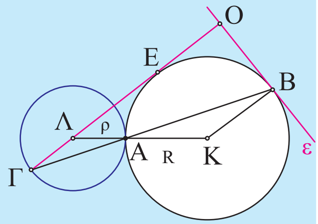
6. Από το ένα κοινό σημείο Α δύο τεμνόμενων κύκλων Κ και Λ φέρνουμε τυχαία ευθεία, που τους τέμνει στα σημεία Β και Γ. Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες στα Β, Γ ορίζουν γωνία ίση με $180^{o} - Κ\hat{Α}Λ$.



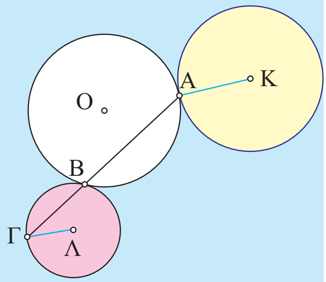
7. Γράφουμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με R > ρ ,που εφάπτονται εσωτερικά στο Ε. Η ευθεία ΚΛ τέμνει τον (Κ, R) στο Α και τον (Λ, ρ) στο Β. Από το μέσον Ο του τμήματος ΑΒ φέρνουμε την ΟΓ κάθετη στην ΑΒ. Αν η ευθεία ΕΓ τέμνει τον κύκλο (Λ, ρ) στο Δ, να δείξετε ότι η ευθεία ΟΔ είναι εφάπτεται στον κύκλο (Λ, ρ).



8. Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Από το Α φέρνουμε ευθεία, που τέμνει τον (Λ, ρ) στο σημείο Γ και τον (Κ, R) στο σημείο Β. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου (Κ, R), στο Β είναι κάθετη στην ευθεία ΓΛ.



9. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται σε κύκλο με κέντρο Ο στα σημεία Α και Β. Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον κύκλο με κέντρο Λ στο Γ, να δείξετε ότι οι ΚΑ και ΛΓ είναι παράλληλες.

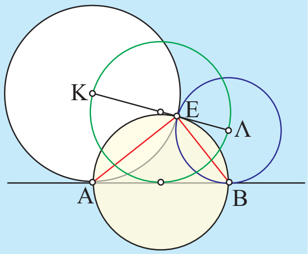


10. Γράφουμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Φέρνουμε και την κοινή εξωτερική εφαπτόμενη τους που εφάπτεται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

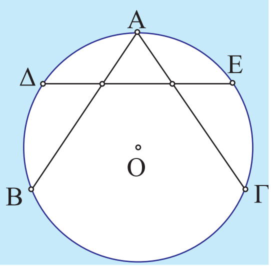
α.Το τίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο

β. Ο κύκλος με διάμετρο την ΑΒ εφάπτεται στην διάκεντρο των κύκλων στο σημείο Ε.

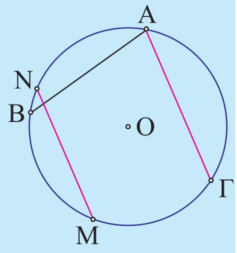
γ. Η ευθεία ΑΒ εφάπτεται στον κύκλο με διάμετρο την ευθεία ΚΛ.



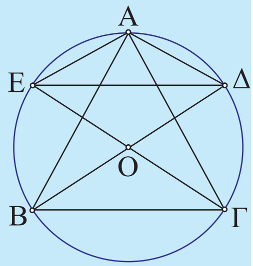
11. Γράφουμε κύκλο (Ο,R) και παίρνουμε δύο ίσα τόξα με κοινή αρχή και μέτρο 120° το καθένα. Έστω Δ και Ε τα μέσα των ίσων τόξων. Να δείξετε ότι η ΔΕ χωρίζεται σε τρία ίσα μέρη από τις αντίστοιχες χορδές των ίσων τόξων που θεωρήσαμε.



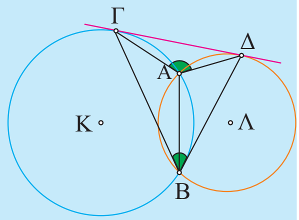
12. Θεωρούμε σημεία Α, Β, Γ κύκλου (Ο, R). Από το μέσο Μ του τόξου ΒΓ φέρνουμε τη χορδή ΜΝ παράλληλη στην ευθεία ΑΓ. Να δείξετε ότι τα τόξα ΑΒ και ΜΝ είναι ίσα.



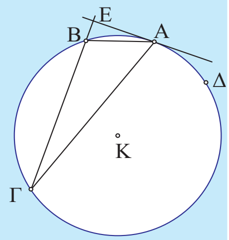
13. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο-.Αν οι διχοτόμοι των ίσων γωνιών Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου τέμνουν το κύκλο στα σημεία Δ, Ε και Ο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων, να δειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΔΟΕ είναι ρόμβος.



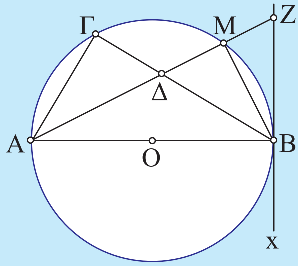
14. Γράφουμε δύο κύκλους που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρνουμε την κοινή εφαπτομένη τους ΓΔ.Να δειχθεί ότι οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{B}\Delta$ είναι παραπληρωματικές.



15. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και τέτοιο ώστε να είναι $\hat{B}-\hat{\Gamma}=90^o$. Να δειχθεί ότι η ευθεία ΒΓ είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο Α.

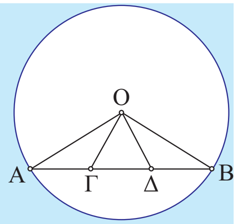


16. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο.Γράφουμε τη διάμετρο ΑΒ και σημειώνουμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Φέρνουμε την εφαπτομένη Βx και τη διχοτόμο της γωνίας ΒΑΓ, που τέμνει τη ΒΓ στο Δ, τον κύκλο στο Μ και τη Βx στο Ζ. Να δειχθεί ότι ΔΒ = ΒΖ.

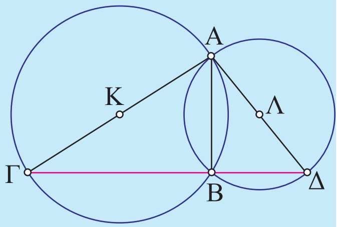


17. Χωρίζουμε τη χορδή ΑΒ κύκλου (Ο,ρ) σε τρία ίσα ευθ.τμήματα ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ. Να δειχθεί ότι:

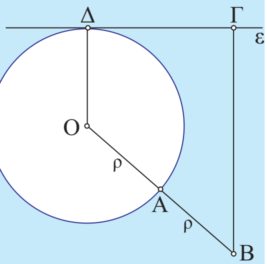
α. $A\hat{O}\Gamma = \Delta\hat{O}B$ **β.** $A\hat{O}\Gamma < \Gamma\hat{O}\Delta$



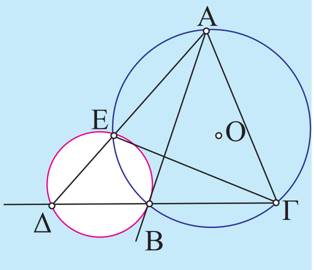
18. Γράφουμε δύο κύκλους που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α ως πρός τους δύο κύκλους, να δείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ, Β είναι συνευθειακά.



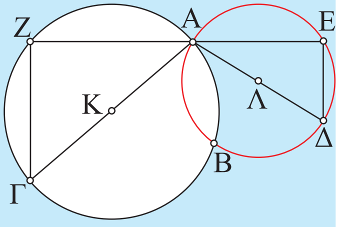
19. Γράφουμε κύκλο (Ο,ρ) και στην προέκταση της ακτίνας ΟΑ, παίρνουμε ευθ.τμήμα ΑΒ ίσο με την ακτίνα.Φέρνουμε τη ΒΓ κάθετη σε τυχαία εφαπτόμενη ε του κύκλου. Να δείξετε ότι η γωνία $O\hat{A}\Gamma$ είναι τριπλάσια της $A\hat{\Gamma}B$.



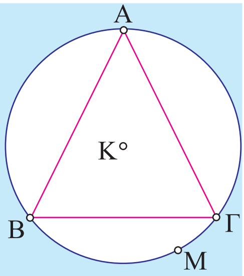
20. Θεωρούμε κύκλο (Ο,ρ) και γράφουμε τις ίσες χορδές ΑΒ , ΑΓ. Φέρνουμε από το Α ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στο Ε και τη ΒΓ στο Δ. Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Β, Δ, Ε εφάπτεται στην ΑΒ.



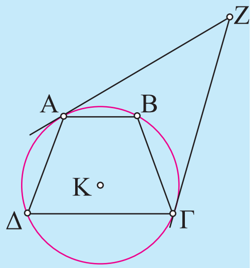
21. Γράφουμε δύο κύκλους που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΚΓ και ΑΛΔ και τις παράλληλες χορδές ΓΖ και ΔΕ. Να δειχθεί ότι τα σημεία Ζ, Α, Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



22. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ,R) τυχαίο σημείο Μ του τόξου ΒΓ. Να δείξετε ότι: ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ.



23. Τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ,ρ). Να δείξετε ότι, η γωνία των εφαπτόμενων του κύκλου αυτού, στα σημεία Α και Γ, είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν οι προεκτάσεις των πλευρών ΑΔ και ΒΓ.



Δ. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Σε κύκλο παίρνουμε σημείο Γ της διαμέτρου ΑΒ. Γράφουμε τους κύκλους με διαμέτρους τα ευθ,τμήματα ΑΓ και ΓΒ. Φέρνουμε ευθεία που διέρχεται από το Γ και τέμνει τους τρεις κύκλους κατά σειρά στα σημεία Δ, Ε, Ζ και Η.
Να δείξετε ότι: ΔΕ = ΖΗ.

Β. Γράφουμε κύκλο (Ο,R) και παίρνουμε δύο τόξα μικρότερα των 180^0 με κοινή αρχή Α. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων. Αν η ΔΕ τέμνει τις χορδές που θεωρήσαμε στα Ζ,Η να δείξετε ότι ΑΖ = ΑΗ.

Μάθημα 10

Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

i) Ένα πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο όταν οι κορυφές του είναι σημεία ενός κύκλου.

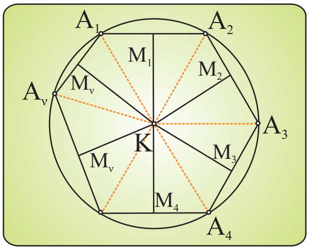
ii) Ένα πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ λέγεται **εγγράψιμο** σε κύκλο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να περνά από τις κορυφές του.

Θεώρημα

Αν ένα πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο οι μεσοκάθετοι των πλευρών του περνούν από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω το εγγεγραμμένο πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ θα δείξουμε ότι οι μεσοκάθετοι στις πλευρές του, περνούν από το ίδιο σημείο. Επειδή οι πλευρές του πολυγώνου είναι χορδές του κύκλου, και επειδή η κάθετος στο μέσον μιας χορδής περνά από το κέντρο του κύκλου έπεται ότι η μεσοκάθετοι στις πλευρές του πολυγώνου περνούν από το κέντρο του κύκλου.



Θεώρημα

Εάν οι $\nu-1$ μεσοκάθετοι των πλευρών ενός πολυγώνου $A_1A_2A_3...A_\nu$ περνούν από το ίδιο σημείο τότε το πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη

Έστω το πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ του οποίου οι μεσοκάθετοι στις $\nu-1$ πλευρές του, περνούν από το σημείο Κ. Τότε το σημείο Κ επειδή ανήκει σε κάθε μία από τις $\nu-1$ μεσοκαθέτους θα ισαπέχει από τα άκρα των πλευρών δηλαδή:

$$KA_1 = KA_2,\ KA_2 = KA_3 ... KA_{\nu-1} = KA_\nu \Rightarrow KA_1 = KA_2 = KA_3 = ... = KA_\nu .$$

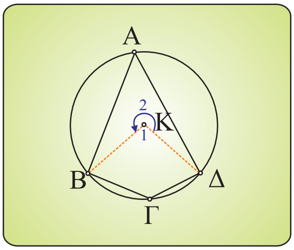
Άρα αν με κέντρο το Κ και ακτίνα το ΚΑ γράψουμε κύκλο αυτός θα περάσει από όλες τις κορυφές και επομένως το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Θεώρημα

Οι απέναντι γωνίες κάθε εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές και αντίστροφα.

Απόδειξη



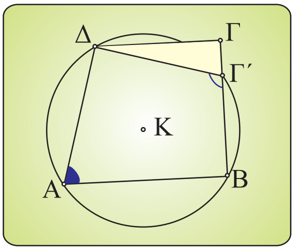
Έστω ΑΒΓΔ ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο . Φέρνουμε τις ΚΒ, ΚΔ και έχουμε: $\hat{A} = \frac{\hat{K}_1}{2}(1)$ και $\hat{\Gamma} = \frac{\hat{K}}{2}(2)$.

Άρα $\hat{A} + \hat{\Gamma} = \frac{\hat{K}_1 + \hat{K}_2}{2} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{\Gamma} = \frac{360^o}{2} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$

Αντίστροφα

Αν οι απέναντι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη



Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι γωνίες $A + \Gamma = 180^o\ (1)$ θα δείξουμε ότι είναι εγγράψιμο. Γράφουμε τον κύκλο που περνά από τα σημεία Δ, Α, Β και έστω ότι δεν περνά από το Γ, τότε θα τμήσει την ΒΓ σ' ένα σημείο Γ΄ διάφορο του Γ΄και έχουμε: $A + \Gamma' = 180^o\ (2)$. Από τις (1), (2) έπεται $\Gamma = \Gamma'$, που είναι άτοπο.

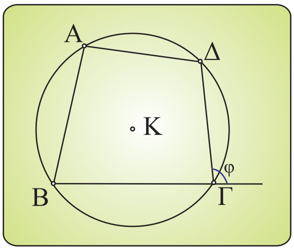
Πόρισμα

Κάθε ορθογώνιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και αντίστροφα.

Θεώρημα

Η εξωτερική γωνία κάθε εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι και αντίστροφα.

Απόδειξη



Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο, θα δείξουμε ότι $\hat{\varphi} = \hat{A}$. Είναι $\hat{\varphi} + \hat{\Gamma} = 180^o$ (1) (ευθεία γωνία) και $\hat{\Gamma} + \hat{A} = 180^o$ (2) (απέναντι γωνίες του εγγ. ΑΒΓΔ).

Από τις (1), (2) έπεται $\hat{\varphi} + \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} + \hat{A} \Rightarrow \hat{\varphi} = \hat{A}$.

Αντίστροφα

Αν η εξωτερική γωνία ενός τετραπλεύρου είναι ίση με την εσωτερική και απέναντι, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο που η εξωτερική γωνία $\hat{\varphi} = \hat{A}$ (1) θα δείξουμε ότι αυτό είναι εγγράψιμο. Έχουμε $\hat{\varphi} + \hat{\Gamma} = 180^o$ (2).

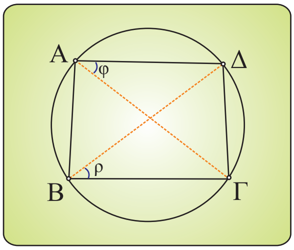
Από τις $(1),(2)$ έπεται $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$, επομένως το ΑΒΓΔ εγγράψιμο.

Θεώρημα

Σε κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο δύο διαδοχικές κορυφές βλέπουν την απέναντι πλευρά υπό ίσες γωνίες και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε $\hat{\varphi} = \hat{\rho}$ γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΓΔ.



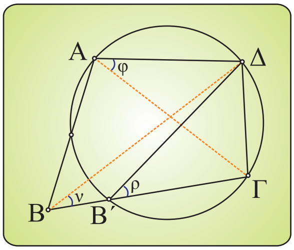
Αντίστροφα

Αν σε ένα τετράπλευρο δύο διαδοχικές κορυφές, βλέπουν την απέναντι πλευρά υπό ίσες γωνίες τότε είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ένα τετράπλευρο στο οποίο $\hat{\varphi} = \hat{\nu}$ (1). Θα δείξουμε ότι είναι εγγράψιμο. Έστω ότι το ΑΒΓΔ δεν είναι εγγράψιμο, τότε ο κύκλος που περνά από τις κορυφές Α, Δ, Γ θα τμήσει την ΓΒ σ' ένα σημείο Β΄ διάφορο του Β. Φέρνουμε την Β΄Δ τότε $\hat{\varphi} = \hat{\rho}$ (2) ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$.

Από τις (1), (2) έπεται ότι $\hat{\rho} = \hat{\nu}$, που είναι άτοπο.

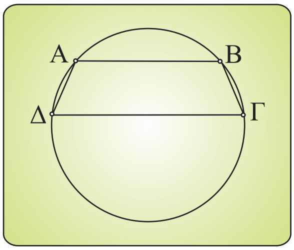


Θεώρημα

Κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ. Είναι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o$ (1) ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από την ΑΔ. Επίσης $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (2) ως προσκείμενες στη βάση ΔΓ. Από τις (1), (2) έπεται $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$,άρα το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.



Αντίστροφα

Κάθε εγγεγραμμένο τραπέζιο σε κύκλο, είναι ισοσκελές.

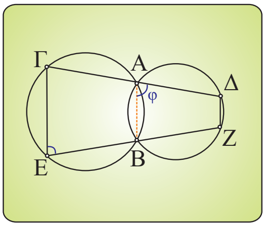
Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ένα τραπέζιο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ έπεται $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o$ (1). Επειδή είναι εγγεγραμμένο ισχύει : $\hat{A} + \hat{\Delta} = \hat{A} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, αρά το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Παράδειγμα 1. Δύο κύκλοι τέμνονται στα Α, Β. Από τα Α, Β φέρνουμε δύο τέμνουσες ΓΑΔ και ΕΒΖ. Να αποδείξετε ότι οι χορδές ΓΕ και ΔΖ είναι παράλληλες.

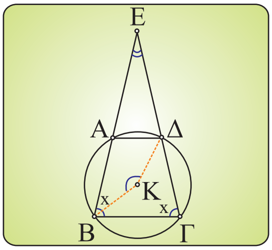
Απόδειξη



Φέρνουμε την ΑΒ τότε $\hat{\varphi} = \hat{E}\,(1)$ γιατί ή φ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο ΑΒΕΓ. $\varphi + Z = 2$ ορθές. (2) γιατί είναι απέναντι γωνίες του εγγεγραμμένου ΑΔΖΒ. Από τις (1), (2) έχουμε $E + Z = 2$ ορθές. Επομένως ΓΕ || ΔΖ .

Παράδειγμα 2ο. Δίνεται εγγεγραμμένο τραπέζιο ΑΒΓΔ σε κύκλο (Κ,R). Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που περνά από τα Β, Κ, Δ, περνά και από το σημείο της τομής των μη παραλλήλων πλευρών του.

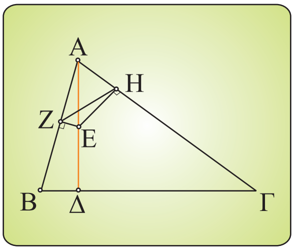
Απόδειξη



Επειδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμένο θα είναι ισοσκελές και επομένως $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{x}$. Από το τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε $\hat{E} + \hat{x} + \hat{x} = 180^o \Leftrightarrow \hat{E} + 2\hat{x} = 180^o\,(1)$. Επειδή όμως $\hat{K} = 2\hat{x}$ (εγγεγραμμένη και η αντίστοιχη επίκεντρη) η (1) γίνεται: $\hat{E} + \hat{K} = 180^o$, άρα το ΕΒΚΔ είναι εγγράψιμο.

Παράδειγμα 3ο. Από ένα σημείο Ε του ύψους ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τις κάθετες ΕΖ, ΕΗ στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΒΖΗΓ είναι εγγράψιμο.

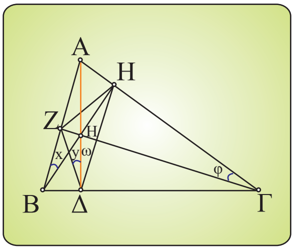
Απόδειξη



Για να δείξουμε ότι το ΒΖΗΓ είναι εγγράψιμο αρκεί να δείξουμε ότι: $\hat{\Gamma} + B\hat{Z}H = 180^o$. Επειδή $B\hat{Z}E = 90^\circ$ αρκεί να δείξουμε ότι $E\hat{Z}H + \hat{\Gamma} = 90^o$. Από το ΑΖΕΗ που είναι εγγράψιμο $\left(\hat{Z} = \hat{H} = 90^o\right)$ η $Z\hat{E}H = E\hat{A}H$, είναι όμως $E\hat{A}H + \hat{\Gamma} = 90^o$ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα και $Z\hat{E}H + \hat{\Gamma} = 90^o$.

Παράδειγμα 4ο. Να αποδείξετε ότι τα ύψη κάθε τριγώνου είναι διχοτόμοι των γωνιών του ορθικού του τριγώνου.

Απόδειξη



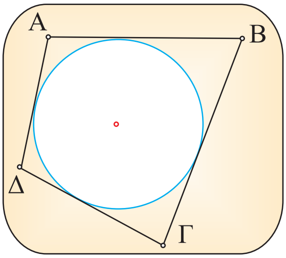
Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο και ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη του, θα δείξουμε ότι $\hat{y} = \hat{\omega}$. Το τετράπλευρο ΒΔΗΑ είναι εγγράψιμο $\left(\widehat{\Delta} = \widehat{H} = 90^o\right)$ άρα $\widehat{\omega} = \widehat{x}\,(1)$. Όμοια $\hat{y} = \hat{\varphi}\;(2)$ από το ΔΖΗΓ.

Επειδή $\hat{x} = \hat{\varphi}$ (από το εγράψιμο ΒΖΗΓ) από τις (1), (2) έχουμε $\hat{y} = \hat{\omega}$.

ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

i) Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένο** σε κύκλο όταν οι πλευρές του εφάπτονται στον ίδιο κύκλο.

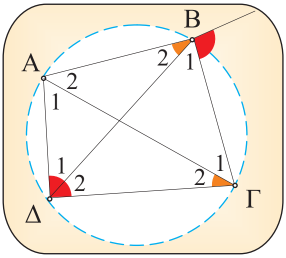
ii) Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγράψιμο** σε κύκλο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να εφάπτεται στις πλευρές του.



Β ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο αποδεικνύουμε ένα απο τα επόμενα (κριτήρια)

1. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
2. Μία εξωτερική γωνία του είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.
3. Δύο διαδοχικές κορυφές, βλέπουν την απέναντι πλευρά με ίσες γωνίες.



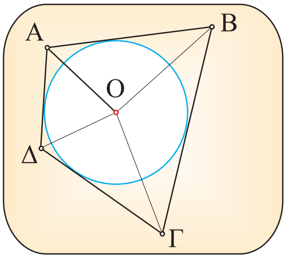
π.χ στο διπλανό σχήμα ισχύουν: $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$, $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Delta_1}$, $\widehat{A_2} = \widehat{\Delta_2}$, $\widehat{\Gamma_2} = \widehat{B_2}$

$\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 180^0$, $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 180^0$

$\widehat{\Delta} = \widehat{B}_{\varepsilon\xi}$, $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$, $\widehat{B} = \widehat{\Delta}_{\varepsilon\xi}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{A}_{\varepsilon\xi}$

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο αποδεικνύουμε ένα απο τα επόμενα (κριτήρια)

1. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
2. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.



ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ
ΟΑ , ΟΒ ,ΟΓ ,ΟΔ : διχοτόμοι

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

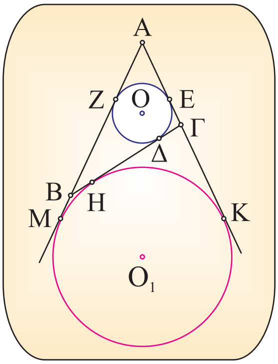
Άσκηση 1

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στις πλευρές, στα σημεία Δ, Ε, Ζ και ο παρεγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στη ΒΓ στο Η και στις ΑΒ, ΑΓ στα Μ και Κ. Να δείξετε ότι ισχύουν:

i. $AZ = AE = \tau - \alpha$

ii. $AM = AK = \tau$, $ZM = \alpha$

iii. $H\Delta = |\beta - \gamma|$



Λύση

i. $AE = AZ = AB - BZ = \gamma - B\Delta = \gamma - (\alpha - \Delta\Gamma) = \gamma - \alpha + \Gamma E =$
$= \gamma - \alpha + \beta - AE.$

Οπότε είναι: $2 \cdot AE = \beta + \gamma - \alpha \Leftrightarrow AE = AZ = \dfrac{\beta + \gamma - \alpha}{2} = \tau - \alpha$

Επίσης: $BZ = B\Delta = \tau - \beta$, $\Gamma E = \Gamma\Delta = \tau - \gamma$.

ii. Έχουμε $AM = \gamma + BM$, $AK = \beta + \Gamma K$ και $AM = AK$.

Τότε είναι

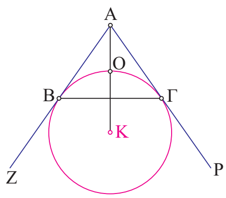
$$2 \cdot AM = \beta + \gamma + BM + \Gamma K \Leftrightarrow 2 \cdot AM = \beta + \gamma + BH + H\Gamma \Leftrightarrow 2 \cdot AM = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow$$

$$AM = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \tau \text{ και } ZM = AM - AZ = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$$

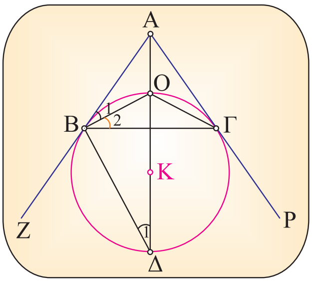
iii. Είναι $H\Delta = B\Delta - BH = \tau - \beta - BM = \tau - \beta - (AM - \gamma) = \tau - \beta - AM + \gamma = |\beta - \gamma|$

Άσκηση 2

Κύκλος με κέντρο Κ εφάπτεται στις πλευρές ΑΖ και ΑΡ γωνίας ΖΑΡ στα σημεία Β και Γ. Αν η ΑΚ τέμνει το κύκλο στο σημείο Ο, να δειχθεί ότι το Ο είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση



Η ΑΚ είναι διχοτόμος. Αρκεί να δείξουμε ότι η ΒΟ είναι επίσης διχοτόμος.

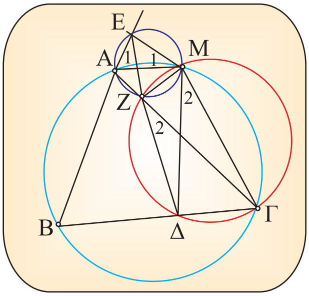
Είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$, ως γωνία εγγεγραμμένη ίση με τη γωνία χορδή - εφαπτομένης και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_1$, διότι είναι οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές.

Έτσι είναι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, που σημαίνει ότι η ΒΟ είναι διχοτόμος της γωνίας Β του ΑΒΓ. Άρα το Ο είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 3

Από τυχαίο σημείο του περιγγεγραμμένου σε τρίγωνο κύκλου φέρνουμε τις κάθετες στις τρεις πλευρές του. Να δειχθεί ότι τα ίχνη των τριών καθέτων βρίσκονται σε ευθεία γραμμή (ευθεία Simson).

Λύση



Τα τετράπλευρα ΑΖΜΕ και ΜΖΔΓ είναι εγγράψιμμα αφού τα σημεία Ζ, Ε βλέπουν το ΜΑ με ορθή γωνία και τα σημεία Ζ, Δ βλέπουν το ΜΓ με ορθή γωνία. Οπότε

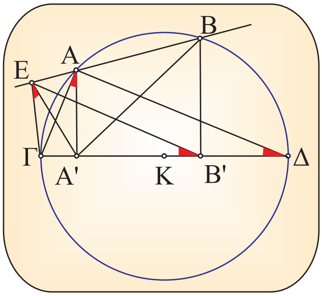
$\hat{M}_1 = \hat{Z}_1$ και $\hat{M}_2 = \hat{Z}_2$. Άρα $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$. Τότε είναι

$\hat{Z}_1 + E\hat{Z}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow \hat{Z}_2 + E\hat{Z}\Gamma = 180^o$, επομένως η ΕΖΔ είναι ευθεία.

Άσκηση 4

Στο κύκλο (Κ,R) παίρνουμε τη διάμετρο ΓΔ. Από δύο σημεία Α και Β του ίδιου ημικύκλιου φέρνουμε τις αποστάσεις ΑΑ΄ και ΒΒ΄ στην ΓΔ. Αν ΓΕ είναι η απόσταση του Γ από την ευθεία ΑΒ, να δειχθεί, ότι: α) $EB'//\Delta A$, β) $\Gamma\hat{E}A' = E\hat{B}'A'$.

Λύση



α) Από το εγγράψιμο $E\Gamma A'A\left(\Gamma\hat{E}A = AA'\Gamma_1 = 90^o\right)$ έχουμε:

$\Gamma\hat{E}A' = \hat{A}_1$ και $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ (έχουν κάθετες πλευρές).

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΕΓΒ΄Δ έχουμε: $E\hat{B}\Gamma = \hat{B}_1$

και $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$, $\hat{\Delta}_1 = E\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow E\hat{B}'//\Delta A$.

β) Είναι ακόμα: $\Gamma\hat{E}A' = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{B}'_1 = E\hat{B}'A'$.

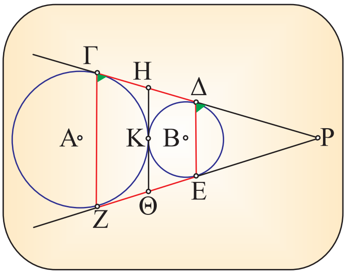
Άσκηση 5

Δύο κύκλοι (Α,R) και (Β,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Κ. Αν ΓΔ, ΕΖ τα κοινά εξωτερικά εφαπτόμενα τμήματα, να δειχθεί ότι: το τετράπλευρο ΓΔΕΖ είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

Λύση

Έστω Ρ το σημείο, το σημείο τομής των κοινών εφαπτόμενων των κύκλων. Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΡΔΕ και ΡΓΖ έχουμε:

$$2\hat{\Gamma} + \hat{P} = 2\hat{\Delta} + \hat{P} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} \Leftrightarrow \Gamma Z // \Delta E .$$

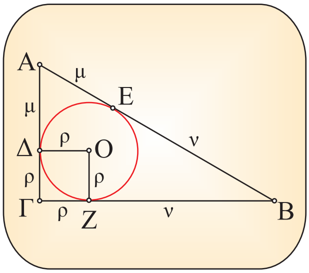


Άρα το $Z\Gamma\Delta E$ είναι τραπέζιο. Επειδή $\Gamma\Delta = EZ$ το $Z\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Φέρνουμε την εσωτερική εφαπτομένη $H\Theta$. Τότε $\Delta H = KH = \Gamma H$ (ίσα εφαπτόμενα τμήματα). Άρα τα σημεία Η και Θ είναι τα μέσα των ΓΔ και ΕΖ,που σημαίνει ότι $H\Theta // = \dfrac{\Gamma Z + \Delta E}{2}$ (1). Επειδή $KH = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$ και $K\Theta = \dfrac{EZ}{2}$ έχουμε $H\Theta = \dfrac{\Gamma\Delta + EZ}{2}$ (2). Άρα $\Gamma Z + \Delta E = \Gamma\Delta + EZ$,που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΖΓΔΕ είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

Άσκηση 6

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{\Gamma} = 90^o)$,να δειχτεί ότι: $\beta + \gamma = 2\rho + \alpha$.

Λύση



Το ΟΔΓΖ είναι τετράγωνο, αφού ισχύουν :

$$\left(\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = \hat{Z} = 90^o \;\; \Delta = OZ = \rho\right).$$

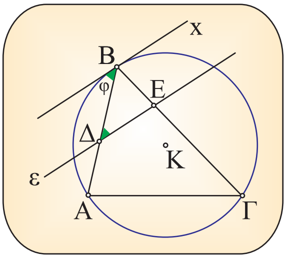
Επομένως $\Gamma\Delta = \Gamma Z = \rho$. Είναι και $A\Delta = AE$ και $BZ = BE$ (ως ίσα εφαπτόμενα τμήματα). Άρα

$$\beta + \gamma = \Gamma B + \Gamma A = \rho + \nu + \rho + \mu = 2\rho + (\mu + \nu) = 2\rho + \alpha .$$

Άσκηση 7

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,ρ). Φέρνουμε την εφαπτομένη στο Β και ευθεία ε παράλληλη στην εφαπτομένη αυτή, που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ε και την ΑΒ στο σημείο Δ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΓ είναι εγγράψιμο.

Λύση



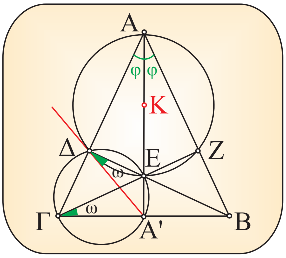
Είναι $\hat{\varphi} = \hat{\Gamma}$,ως γωνία χορδής και εφαπτομένης που είναι ίση με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη .

Είναι $\hat{\varphi} = B\hat{\Delta}E$,αφού ΔΕ παράλληλη στην εφαπτομένη. Άρα $B\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma}$,που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΔ είναι εγγράψιμο , αφού η εξωτερική γωνία ΒΔΕ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική Γ.

Άσκηση 8

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$.Φέρνουμε το ύψος ΑΑ΄ και έστω Ε το ορθόκεντρο και Κ το μέσο του ΑΕ. Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΑ , που τέμνει την ΑΓ στο Δ.
Να δείξετε ότι η Α΄Δ εφάπτεται στον κύκλο (Κ,ΚΑ).

Λύση



Το τετράπλευρο ΕΔΓΑ΄ είναι εγγράψιμο ,αφού οι γωνίες Δ και Α΄είναι παραπληρωματικές.

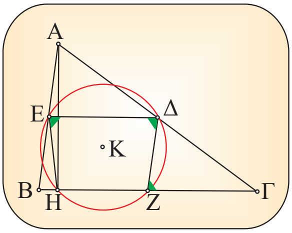
Επομένως $E\hat{\Delta}A' = E\hat{\Gamma}A' = \hat{\omega}$,ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο.

Ακόμα είναι $E\hat{\Gamma}A' = A'\hat{A}B = A'\hat{A}\Gamma = \hat{\varphi}$ (αφού ΑΑ΄: ύψος και διχοτόμος ισοσκελούς τριγώνου). Άρα $E\hat{\Delta}A' = A'\hat{A}\Gamma$,δηλ. η Α΄Δ είναι εφαπτόμενη.

Άσκηση 9

Δείξτε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται και από τα ίχνη των ύψων του τριγώνου.

Λύση



Ο κύκλος που διέρχεται από τα μέσα Ε, Δ και Ζ του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται και από το ίχνος Η του ύψους ΑΗ, αν δείξουμε ότι το τετράπλευρο ΕΔΖΗ είναι εγγράψιμο.

Γι'αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{E}H$.

Είναι $\Delta\hat{Z}\Gamma = E\hat{\Delta}Z$, διότι ΕΔ//ΒΓ. Το τετράπλευρο ΕΔΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε $\Delta\hat{E}H = E\hat{\Delta}Z$. Άρα $\Delta\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{E}H$.
Όμοια αποδεικνύεται και για τα υπόλοιπα ίχνη.

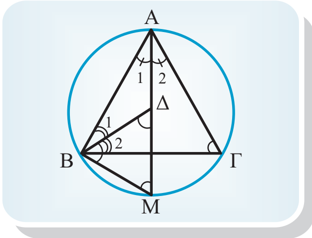
Άσκηση 10

Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλου στο Μ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΜ στο Δ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΒΔ είναι ισοσκελές.

Λύση

Επειδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$, θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$. Επίσης και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$,

αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\hat{B}$. Έχουμε:



- $\hat{M} = \hat{\Gamma}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.
- $M\hat{B}\Gamma = \hat{A}_2$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{M\Gamma}$.

  Οπότε:

$$\Delta\hat{B}M = \hat{B}_2 + M\hat{B}\Gamma = \hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = \frac{180^o - \hat{\Gamma}}{2} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

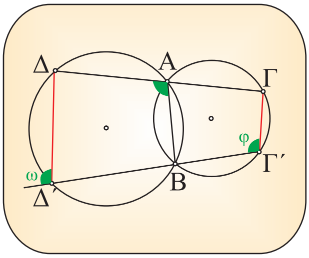
- $B\hat{\Delta}M = 180^o - \Delta\hat{B}M - \hat{M} = 180^o - \left(90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) - \hat{\Gamma} = 180^o - 90^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$

Άρα $\Delta\hat{B}M = B\hat{\Delta}M = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, οπότε το $M\overset{\triangle}{B}\Delta$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ.

Άσκηση 11

Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α φέρνουμε ευθεία που τέμνει τους κύκλους στα Γ, Δ και απο το Β φέρνουμε ευθεία που τέμνει τους κύκλους Γ΄ και Δ΄. Να δείξετε ότι οι χορδές ΓΓ΄ και ΔΔ΄ είναι παράλληλες.

Λύση



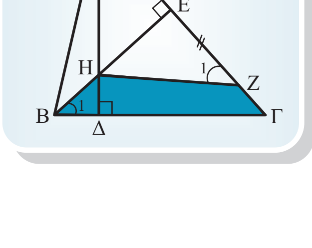
Είναι $B\hat{A}\Delta = \hat{\omega}$ και $B\hat{A}\Delta = \hat{\varphi}$,ως εξωτερικές γωνίες εγγεγραμμένου τετραπλεύρου που είναι ίσες αντίστοιχα με τις απέναντι εσωτερικές.

Άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi} \Leftrightarrow \Delta\Delta' // \Gamma\Gamma'$

Άσκηση 12

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, θεωρούμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ και έστω Η το ορθόκεντρό του. Στο ΕΓ παίρνουμε τμήμα ΕΖ = ΑΕ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ $(\hat{\Delta} = 1^{\llcorner})$ έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 90^o - \hat{\Gamma} \quad (1)$$

Ομοίως από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\overset{\triangle}{E}\Gamma$ $(\hat{E} = 1^{\llcorner})$ έχουμε:

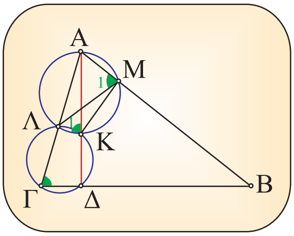
$\hat{B}_1 = 90^o - \hat{\Gamma}$ (2)

Το $\overset{\triangle}{AHZ}$ είναι ισοσκελές, αφού το ΗΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{Z}_1 = 90^o - \hat{\Gamma} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \hat{Z}_1 = \hat{B}_1$. Άρα το τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι εγγράψιμο αφού μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία.

Άσκηση 13

Από ένα σημείο Θ του ύψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρνουμε τα τμήματα ΘΜ και ΘΛ κάθετα στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΛΜ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση

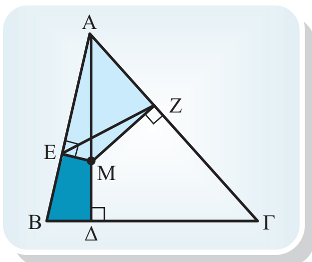


Είναι $\widehat{M}_1 = \hat{\Theta}_1$,αφού το ΑΛΘΜ είναι εγγράψιμο και $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Gamma}$,αφού το ΘΛΓΔ είναι εγγράψιμο. Άρα $\widehat{M}_1 = \hat{\Gamma}$, που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΓΒΚΛ είναι εγγράψιμο ,αφού η εξωτερική γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

Άσκηση 14

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Από τυχαίο σημείο Μ του ΑΔ φέρουμε τις αποστάσεις του ΜΕ και ΜΖ από τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο.

Λύση



Το τετράπλευρο ΕΜΔΒ είναι εγγράψιμο, αφού

$$B\hat{E}M + B\hat{\Delta}M = 90^o + 90^o = 180^o.$$

Άρα $\hat{B} + E\hat{M}\Delta = 180^o$ (1)

Ομοίως και το τετράπλευρο ΑΕΜΖ είναι εγγράψιμο $\left(A\hat{E}M + A\hat{Z}M = 90^o + 90^o = 180^o\right)$, οπότε η πλευρά του ΕΜ φαίνεται από τις κορυφές Α και Ζ υπό ίσες γωνίες.

Άρα $E\hat{A}M = E\hat{Z}M$ (2).

Στο τρίγωνο ΑΕΜ η $E\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική, οπότε:

$$E\hat{M}\Delta = E\hat{A}M + A\hat{E}M \Leftrightarrow E\hat{M}\Delta = E\hat{A}M + 90^o \quad (3)$$

Στο τετράπλευρο ΒΕΖΓ έχουμε:

$$\hat{B} + E\hat{Z}\Gamma = \hat{B} + \left(E\hat{Z}M + M\hat{Z}\Gamma\right) \overset{(2)}{=} \hat{B} + \left(E\hat{A}M + 90^o\right) \overset{(3)}{=} \hat{B} + E\hat{M}\Delta \overset{(1)}{=} 180^o$$

Άρα το ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο, αφού δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

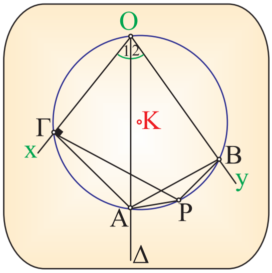
Άσκηση 15

Σε γωνία $x\hat{O}\psi$ παίρνουμε τη διχοτόμο ΟΔ και το εσωτερικό της σημείο Ρ της $\Delta\hat{O}\psi$. Αν Α,Β,Γ είναι οι προβολές του Ρ στις ημιευθείες ΟΔ, Οx, Οψ, να δειχθεί ότι:

α. Τα σημεία Ο, Β, Α, Ρ, Γ είναι ομοκυκλικά

β. ΑΒ = ΑΓ .

Λύση



α. Τα τετράπλευρα ΑΡΒΟ και ΓΡΒΟ, είναι εγγράψιμα στον κύκλο που διέρχεται αποτα σημεία Ρ, Β, Ο, αφού έχουν τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.
Άρα τα σημεία Ο, Γ, Α, Ρ, Β είναι ομοκυκλικά.

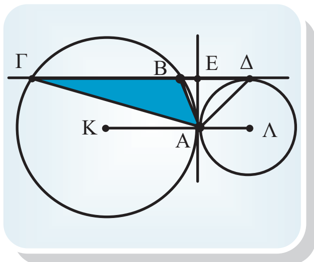
β. Επίσης είναι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, άρα και $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma}$,δηλ.ΑΓ = ΑΒ.

Άσκηση 16

Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) με R > ρ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Από το σημείο Δ του κύκλου (Λ,ρ) φέρουμε ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο (Λ, ρ) και τέμνει τον κύκλο (Κ, ρ) στα σημεία Β, Γ. Να δείξετε ότι η ΑΔ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι: $B\hat{A}\Delta = \Lambda\hat{A}\Delta$



Στο τρίγωνο ΑΓΔ η $\Lambda\hat{A}\Delta$ είναι εξωτερική του γωνία, οπότε: $\Lambda\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}B + A\hat{\Delta}E$ (1)
Φέρουμε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων, η οποία τέμνει της ΓΔ στο Ε. Τότε ΕΑ = ΕΔ σαν εφαπτόμενα τμήματα από το Ε προς τον κύκλο (Λ, ρ). Άρα $A\hat{\Delta}E = \Delta\hat{A}E$ (2) σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.

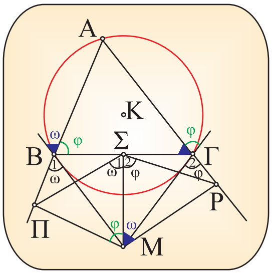
Επίσης $E\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B$ (3) διότι η γωνία από χορδή και εφαπτομένη είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της.

Η $(1) \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} \Lambda\hat{A}\Delta = E\hat{A}B + \Delta\hat{A}E \Leftrightarrow \Lambda\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Delta$

Άσκηση 17

Σε τρίγωνο ΑΒΓ γράφουμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου στις κορυφές Β και Γ, που τέμνονται στο σημείο Μ. Αν Π,Σ,Ρ είναι οι προβολές του Μ στις πλευρές του ριγώνου ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα,να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΠΣΡ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση



Τα ΒΣΜΠ και ΣΜΡΓ είναι εγγράψιμα ,αφού έχουν τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές. Απο αυτά έχουμε τις ισότητες:

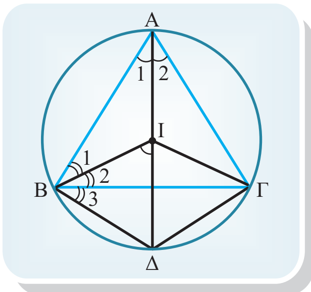
$\hat{\Sigma}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = \Sigma\widehat{M}P = \hat{\omega}$, και $\hat{\Sigma}_2 = \hat{\Gamma}_2 = \hat{B} = \hat{\varphi}$. Άρα ΠΣ//ΜΡ και ΜΠ//ΣΡ ,δηλ. το ΜΠΣΡ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 18

Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγγραμμένο κύκλο του τριγώνου σε σημείο Δ, να δείξετε ότι:
α. Το τρίγωνο ΙΒΔ είναι ισοσκελές, όπου Ι είναι το εγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.
β. Το σημείο Δ είναι περίκεντο του τριγώνου ΙΒΓ.

Λύση

α. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ, οι οποίες τέμνονται στο έγκεντρο Ι. Τότε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Στο τρίγωνο ΙΒΔ έχουμε:



• η γωνία του $B\hat{I}\Delta$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΙ, οπότε:

$$B\hat{I}\Delta = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$$

• $I\hat{B}\Delta = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = \hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$, αφού

$\hat{B}_3 = \hat{A}_2$ σαν εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Άρα $B\hat{I}\Delta = I\hat{B}\Delta$ οπότε το τρίγωνο ΙΒΔ είναι ισοσκελές με κορυφή το Δ, οπότε: ΔΒ = ΔΙ (1)

β. Επειδή οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ είναι ίσες, θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές τους, δηλαδή ΔΒ = ΔΓ (2)
Από (1) και (2) έχουμε: ΔΒ = ΔΙ = ΔΓ, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου ΙΒΓ, άρα είναι το περίκεντρο του.

Άσκηση 19

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε την διχοτόμο του ΑΔ και γράφουμε τους περιγεγραμμένους κύκλους στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ που τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΖ=ΓΕ .

Λύση

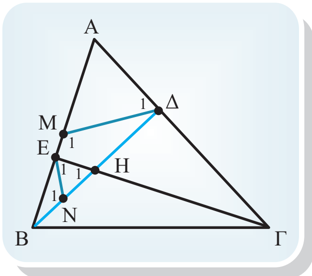
Φέρνουμε τις ΔΖ και ΔΕ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΔΕΓ. Αυτά έχουν:
$\Delta E = \Delta B$ και $\Delta Z = \Delta \Gamma$ σαν χορδές ίσων τόξων, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ (γιατί η $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}$ ως εξωτερική του $AZ\Delta\Gamma$, όμοια $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}$ σαν εξωτερική του ΑΕΔΒ).

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΔΕΓ είναι ίσα και από την ισότητα αυτών έπεται ότι είναι $BZ = \Gamma E$.

Άσκηση 20

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ και Ν το μέσο του ΗΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΜΕΝ είναι εγγράψιμο.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{B}\Delta$ η ΜΔ είναι η διάμεσος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ΑΒ. Άρα $\Delta M = \frac{AB}{2} = AM$. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}$ (1) ως προσκείμενες γωνίες στην βάση του ΑΔ. Τότε για την εξωτερική γωνία $\hat{M}_1$ του τριγώνου ΑΔΜ έχουμε: $\hat{M}_1 = \hat{A} + \hat{\Delta}_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{M}_1 = 2\hat{A}$ (2).

Το τετράπλευρο ΑΔΗΕ έχει $A\hat{\Delta}H + A\hat{E}H = 90^o + 90^o = 180^o$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο. Συνεπώς θα ισχύει ότι $\hat{H}_1 = \hat{A}$ (3), αφού κάθε εξωτερική γωνία εγγράψιμου τετραπλευρού είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΗ η ΕΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΗ.
Άρα $EN = \frac{BH}{2} = NH$. Δηλαδή το τρίγωνο ΕΝΗ είναι ισοσκελές με κορυφή Ν. Άρα $\hat{H}_1 = \hat{E}_1$ (4) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του. Οπότε για την εξωτερική του γωνία $\hat{N}_1$ έχουμε:

$\hat{N}_1 = \hat{E}_1 + \hat{H}_1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{N}_1 = 2\hat{H}_1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{N}_1 = \hat{M}_1$. Άρα το τετράπλευρο ΔΜΕΝ είναι εγγράψιμο, αφού μια εξωτερική γωνία του είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

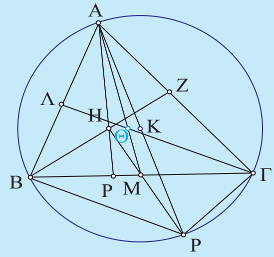
1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ γράφουμε τον περιγγεγραμμένο κύκλο με κέντρο το Κ. Αν Ρ το αντιδιαμετρικό του Α, Μ το μέσο της ΒΓ, Η και Θ το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα,να δείξετε ότι:

α. Το ΡΒΗΓ είναι παραλληλόγραμμο

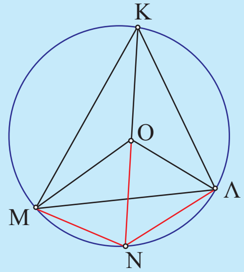
β. $KM = \frac{AH}{2}$

γ. Τα σημεία Η, Θ, Κ είναι συνευθειακά (***ευθεία του Euler***)

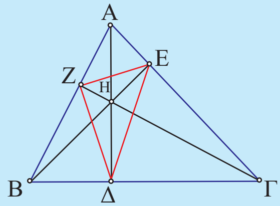
δ. ΗΘ = 2·ΘΚ.



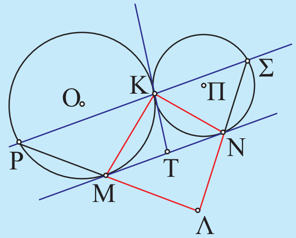
2. Σε τρίγωνο ΚΛΜ, έστω Ο το έγκεντρο και Ν το σημείο, που η διχοτόμος της γωνίας Κ τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλο. Να αποδείξετε ότι $NM = NO = N\Lambda$.



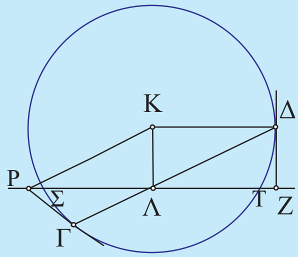
3. Να αποδείξετε ότι τα ύψη οξυγωνίου τριγώνου είναι εσωτερικές διχοτόμοι του ορθικού του τριγώνου.



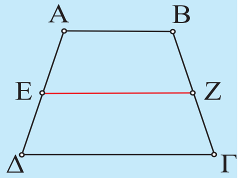
4. Έστω δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Π που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Κ. Από το Κ φέρνουμε ευθεία, που τέμνει τους κύκλους στα σημεία Ρ και Σ αντίστοιχα. Φέρνουμε την κοινή εξωτερική εφαπτόμενη ΜΝ. Αν οι ΡΜ, ΣΝ τέμνονται στο σημείο Λ,να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΛΝ είναι εγγράψιμο.



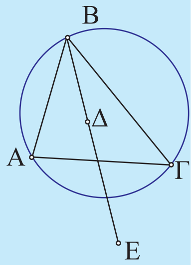
5. Σε κύκλο με κέντρο το Κ φέρνουμε μία χορδή ΓΔ που διέρχεται από το μέσο Λ χορδής ΣΤ. Φέρνουμε τις εφαπτόμενες στα σημεία Γ και Δ, που τέμνουν την ευθεία ΣΤ στα Ρ και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι οι ΡΣ και ΤΖ είναι ίσες.



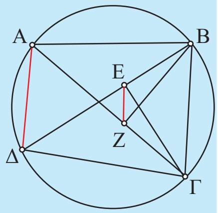
6. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο τέτοιο ώστε η διάμεσος του να είναι ίση με μία από τις μη παράλληλες πλευρές του. Να δείξετε ότι το τραπέζιο είναι περιγράψιμο σε κύκλο.



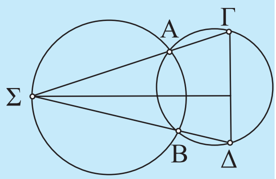
7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ονομάζουμε Δ το έγκεντρο και Ε το παράκεντρο της πλευράς ΑΓ. Να δείξετε ότι το τμήμα ΔΕ διχοτομείται από τον περιγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.



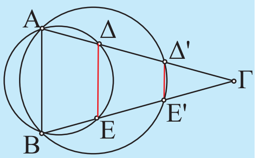
8. Τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,ρ). Φέρνουμε τις ΓΕ και ΒΖ κάθετες αντίστοιχα στις ΒΔ,ΑΓ . Να δείξετε ότι οι ΕΖ και ΑΔ είναι παράλληλες.



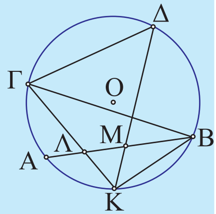
9. Δύο κύκλοι τέμνονται στα Α,Β. Αν Σ είναι ένα σημείο του πρώτου κύκλου και οι ΣΑ, ΣΒ τέμνουν τον άλλο κύκλο στα Γ και Δ, να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το Σ και από το κέντρο Κ του πρώτου κύκλου είναι κάθετη στη ΓΔ.



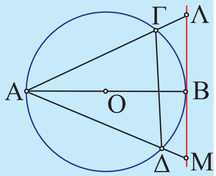
10. Στο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε δύο κύκλους, που διέρχονται από τις κορυφές του Α και Β και τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ ο ένας στα σημεία Δ, Ε και ο άλλος στα σημεία Δ΄ και Ε΄. Να δείξετε ότι ΔΕ και Δ΄Ε΄ είναι παράλληλες.



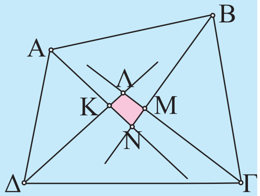
11. Γράφουμε κύκλο (Ο,ρ).Έστω Κ το μέσο ενός κυρτογώνιου τόξου ΑΒ και Γ, Δ δύο σημεία του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΒ . Αν οι χορδές ΚΓ και ΚΔ τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Λ και Μ, να δειχθεί ότι το τετράπλευρο ΓΛΜΔ είναι εγγράψιμο.



12. Γράφουμε τη διάμετρο ΑΒ κύκλου (Ο,ρ) και δύο χορδές ΑΓ και ΑΔ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου. Αν η εφαπτόμενη στο Β, τέμνει τις προεκτάσεις των ΑΓ και ΑΔ στα σημεία Λ και Μ, να δείξετε ότι το ΓΛΜΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



13. Στο μη περιγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Κ,Λ,Μ,Ν, τα σημεία όπου τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του. Να δειχθεί ότι το ΚΛΜΝ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



14. Αν οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ εγγεγραμμένου τετράπλευρου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ε και οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ στο Ζ και η διχοτόμος της γωνίας Ε τέμνει τις ΒΓ, ΑΔ στα σημεία Κ, Μ και η διχοτόμος της $\hat{Z}$ τέμνει τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ, στα Λ, Ρ, να δείξετε ότι:

α. Οι διχοτόμοι των Ε και Ζ τέμνονται κάθετα.

β. Το τετράπλευρο ΚΛΜΡ, είναι ρόμβος.

Δ. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

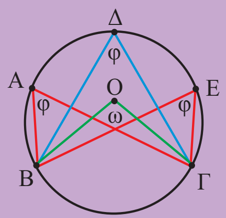
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) έστω Ο το κέντρο του εγγεγραμμένου του κύκλου και Λ, Μ και Κ τα σημεία επαφής αυτού με τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Αν Ρ είναι η προβολή του Μ στην ΚΛ, να δείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΡΓ είναι ορθογώνιο και

β) τα σημεία Α, Μ, Ο, Ρ και Κ, είναι ομοκυκλικά.

11ο μάθημα

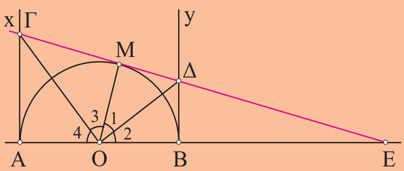
Εγγεγραμμένα σχήματα



7ο Κεφάλαιο

12ο μάθημα

Αναλογίες



Μάθημα 11

Αναλογίες

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ ονομάζεται ο θετικός αριθμός λ για τον οποίο ισχύει: $AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \dfrac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda$

Μέτρο ενός ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται ο λόγος του μεγέθους προς το μέ-γεθος ενός άλλου ευθυγράμμου τμήματος που θεωρείται σαν μονάδα μέτρησης.

Πόρισμα: Δυο ίσα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντιστρόφως.

Θεώρημα: Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους ως προς την ίδια μονάδα μέτρησης και είναι ανεξάρτητα από τη μονάδα μέτρησης.

Αναλογία είναι η ισότητα λόγων. Η σχέση $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \lambda$ είναι αναλογία με λόγο λ και όρους τα τμήματα α,β,γ,δ. Στην πιο πάνω αναλογία τα τμήματα α και γ λέγονται **ανάλογα** των β και δ. Τα α και δ λέγονται **άκροι** όροι ενώ τα β και γ **μέσοι** της αναλογίας. Ο τέταρτος όρος δ λέγεται τέταρτη ανάλογος των α, β και γ. Στην αναλογία $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma}$ οι μέσοι όροι είναι ίσοι. Αυτή η αναλογία λέγεται **συνεχής** και ο β λέγεται **μέση ανάλογος** ή **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Ιδιότητες των αναλογιών.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \ , \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta} , \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \ldots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \ldots + \kappa}{\beta + \delta + \ldots + \lambda}$$

Αρμονική διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος

Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, για κάθε εσωτερικό σημείο Μ του ΑΒ υπάρχει ένα εξωτερικό σημείο Ν του ΑΒ τέτοιο ώστε : $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$

Τα σημεία Μ και Ν ονομάζονται **αρμονικά συζυγή** των Α και Β και τα τέσσερα σημεία Α, Μ, Β, Ν λέγονται αρμονική τετράδα.

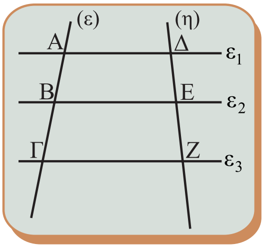
Ιδιότητες

1. Τα σημεία Ν και Μ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του μέσου του ΑΒ.
2. Αρμονικό συζυγές του μέσου δεν ορίζεται.
3. Αν τα Μ και Ν είναι αρμονικά συζυγή των Α και Β, τότε τα Α και Β είναι αρμονικά συζυγή των Μ και Ν.
4. Αν Ο το μέσο του ΑΒ τότε ισχύει $OA^2 = OM \cdot ON$ και αντίστροφα.
5. Σε κάθε αρμονική σημειοσειρά ισχύει: $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} \pm \frac{1}{AN}$

Θεώρημα Θαλή

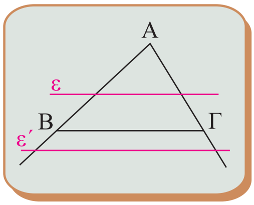
Αν (τρεις τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σ'αυτές τμήματα ανάλογα.
Δηλαδή με βάση το διπλανό σχήμα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$



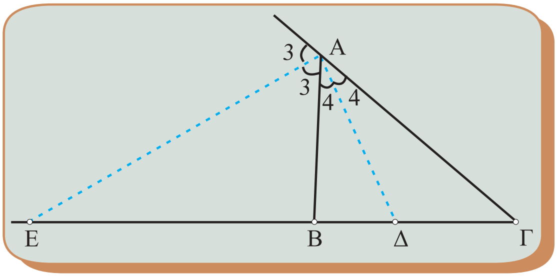
Θεώρημα του Θαλή σε τρίγωνο

Αν μια ευθεία είναι παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου, τότε διαιρεί τις δύο άλλες πλευρές εσωτερικά ή εξωτερικά στον ίδιο λόγο και αντιστρόφως.



Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου

Η εσωτερική διχοτόμος γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Δηλαδή, στο διπλανό σχήμα για τη διχοτόμο ΑΔ ισχύει: $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$



Θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου

Αν η εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου τέμνει το φορέα της απέναντι πλευράς, τότε χωρίζει εξωτερικά αυτή την πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Για παράδειγμα, στο παραπάνω σχήμα για τη διχοτόμο ΑΕ ισχύει: $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{BE}{\Gamma E}$

Παρατήρηση

Επειδή $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{BE}{\Gamma E}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ τα σημεία Δ και Ε είναι αρμονικά συζυγή των Β και Γ.

Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία οι διχοτόμοι διαιρούν την απέναντι πλευρά.

$\Delta B=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$ $\Delta\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$ $EB=\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$ $E\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma},(\beta>\gamma)$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

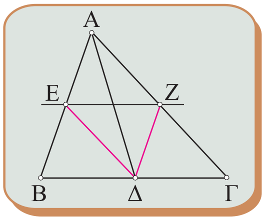
Βλέπε “αναλυτική” μέθοδος στο μάθημα 9.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ διάμεσος αυτού και ΔΕ, ΔΖ οι διχοτόμοι των γωνιών ΑΔΒ και ΑΔΓ (Ε, Ζ πάνω στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα). Να αποδείξετε ότι ΕΖ//ΒΓ.

Λύση



Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο ΑΒΔ (ΔΕ διχοτόμος)

έχουμε: $\frac{EA}{EB}=\frac{\Delta A}{\Delta B}$

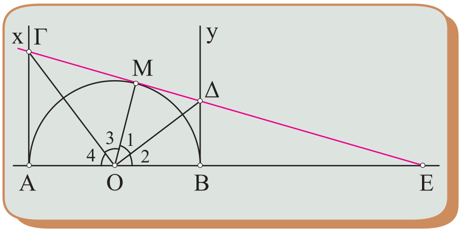
Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο ΑΔΓ (ΔΖ διχοτόμος)

έχουμε: $\frac{ZA}{Z\Gamma}=\frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$

Επειδή ΔΒ = ΔΓ θα είναι $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$ οπότε $\frac{EA}{EB}=\frac{ZA}{Z\Gamma}$ που σημαίνει ΕΖ//ΒΓ.

Άσκηση 2

Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ και οι εφαπτόμενες Αx και By προς το ίδιο μέρος της διαμέτρου. Φέρουμε εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Μ του ημικυκλίου που τέμνει την Αx στο Γ, την By στο Δ και την προέκταση της ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ΓΜ}{ΔΜ}=\frac{ΕΓ}{ΕΔ}$



Λύση

Στο τρίγωνο ΟΜΕ είναι $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$ (διότι $O\overset{\Delta}{M}\Delta = O\overset{\Delta}{\Delta}B$) δηλαδή η ΟΔ είναι η εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΟΜΕ. Άρα: $\frac{ΔΜ}{ΔΕ}=\frac{ΟΜ}{ΟΕ}$ (1)

Επειδή $\widehat{O_3}=\widehat{O_4}$ (διότι $O\overset{\Delta}{A}\Gamma = O\overset{\Delta}{M}\Gamma$) η ΟΓ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΟΜΕ. Άρα: $\frac{ΓΜ}{ΓΕ}=\frac{ΟΜ}{ΟΕ}$ (2)

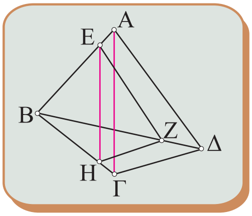
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{ΔΜ}{ΔΕ}=\frac{ΓΜ}{ΓΕ}$ ή $\frac{ΓΕ}{ΔΕ}=\frac{ΓΜ}{ΔΜ}$

Τα σημεία Γ, Δ, Μ, Ε αποτελούν αρμονική τετράδα.

Άσκηση 3

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ επί των ΑΒ και ΒΔ. Φέρουμε ΕΖ//ΑΔ και ΖΗ//ΓΔ. Να αποδείξετε ότι ΕΗ// ΑΓ.

Λύση



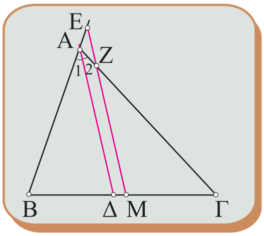
Είναι: $ΕΖ // ΑΔ \Leftrightarrow \frac{ΒΕ}{ΕΑ}=\frac{ΒΖ}{ΖΔ}$ Είναι: $ΖΗ // ΓΔ \Leftrightarrow \frac{ΒΗ}{ΗΓ}=\frac{ΒΖ}{ΖΔ}$

Από τις παραπάνω σχέσεις αυτές έχουμε: $\frac{ΒΕ}{ΕΑ}=\frac{ΒΗ}{ΗΓ}$ οπότε ΕΗ //ΑΓ.

Άσκηση 4

Από το μέσο Μ πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη διχοτόμο της γωνίας Α που τέμνει την ΒΑ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.

Λύση



Επειδή: $ΑΔ // ΜΕ \Leftrightarrow \frac{ΒΕ}{ΑΕ}=\frac{ΒΜ}{ΔΜ}$ (1)

και $\frac{ΓΖ}{ΑΖ}=\frac{ΓΜ}{ΔΜ}$ ή $\frac{ΓΖ}{ΑΖ}=\frac{ΒΜ}{ΔΜ}$ (2)

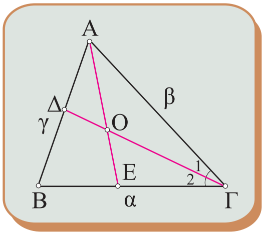
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{BE}{AE} = \frac{\Gamma Z}{AZ}$ (3)

Επειδή είναι $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (ΑΔ: διχοτόμος $\widehat{A}$) και $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$, $\widehat{A_2} = \widehat{Z_1}$ (ΑΔ//ΕΖ) έχουμε ότι $\widehat{Z_1} = \widehat{E_1}$ δηλαδή $AZ = AE$. Η σχέση (3) επειδή $AZ = AE$ γίνεται $BE = \Gamma Z$.

Άσκηση 5

Αν Ο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων τριγώνου ΑΒΓ και ΓΔ η διχοτόμος της γωνίας Γ, να αποδείξετε ότι: $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΔΓ από το θεώρημα διχοτόμων έχουμε:

$$\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \qquad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το θεώρημα διχοτόμων, έχουμε:

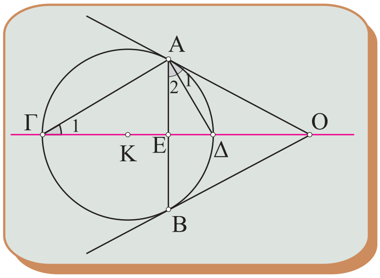
$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{\Delta B + A\Delta} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Οπότε $A\Delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}$. Με αντικατάσταση στην (1), έχουμε: $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{\frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$

Άσκηση 6

Από σημείο Ο εκτός κύκλου (Κ,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΟΑ και ΟΒ και τη διάμετρο ΓΔ. Αν η ΑΒ τέμνει την ΓΔ στο Ε να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ είναι αρμονικά συζυγή των Ο και Ε.

Λύση

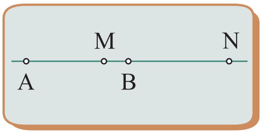


Είναι $\widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1}$ (Η υπό χορδής και εφαπτομένης γωνία, είναι ίση με την εγγεγραμμένη, που αντιστοιχεί στο τόξο της χορδής) και $\widehat{A_2} = \widehat{\Gamma_1}$ (εγγεγραμμένες στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{A\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta B}$).

Άρα $\widehat{A_2} = \widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1}$, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΕΑΟ. Επειδή η $A\Gamma \perp A\Delta$ ($\widehat{\Gamma A \Delta} = 1$, αντιστοιχεί σε ημικύκλιο), η ΑΓ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΕΟ. Άρα τα σημεία Γ και Δ είναι αρμονικά συζυγή των Ε και Ο.

Άσκηση 7

Στην αρμονική σημειοσειρά (Α, Β, Μ, Ν), αν τα σημεία Ο και Ο΄ είναι μέσα των ΑΒ, ΜΝ τότε να δείξετε ότι:



$$4(\mathrm{OO'})^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{MN})^2$$

Λύση

Είναι: $\mathrm{OM} = \mathrm{OO'} - \mathrm{O'M}$ και $\mathrm{ON} = \mathrm{OO'} + \mathrm{O'N} = \mathrm{OO'} + \mathrm{O'M}$.

Άρα $(\mathrm{OM})(\mathrm{ON}) = (\mathrm{OO'} - \mathrm{O'M})(\mathrm{OO'} + \mathrm{O'M})$ ή $(\mathrm{OM})(\mathrm{ON}) = (\mathrm{OO'})^2 - (\mathrm{O'M})^2$.

Κατά την ιδιότητα (4) έχουμε: $(\mathrm{OA})^2 = (\mathrm{OM})(\mathrm{ON})$

Άρα: $(\mathrm{OA})^2 = (\mathrm{OO'})^2 - (\mathrm{O'M})^2$ ή

$$\left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2 = (\mathrm{OO'})^2 - \left(\frac{\mathrm{MN}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4(\mathrm{OO'})^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{MN})^2$$

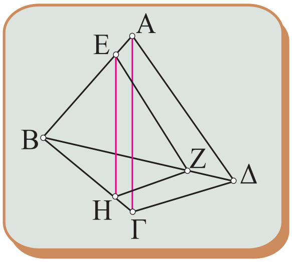
Άσκηση 8

Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι ΒΔ και ΓΕ είναι διχοτόμοι και ισχύει:

$$\mathrm{BE} = \Gamma\Delta\,.$$

Να δείξετε ότι: **α.** $\mathrm{EK}\cdot\mathrm{KB} = \Delta\mathrm{K}\cdot\mathrm{K}\Gamma$ **β.** $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$

όπου Κ το έγκεντρο του τριγώνου.



Λύση

α. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\Delta\mathrm{K}}{\mathrm{KB}} = \frac{\mathrm{KE}}{\mathrm{K}\Gamma}$. Στο τρίγωνο ΒΓΔ η ΓΚ είναι διχοτόμος, άρα $\frac{\mathrm{K}\Delta}{\mathrm{KB}} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\mathrm{B}}$ (1). Στο τρίγωνο ΒΕΓ η ΒΚ είναι διχοτόμος, είναι $\frac{\mathrm{KE}}{\mathrm{K}\Gamma} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B}\Gamma}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) και επειδή $\mathrm{BE} = \Gamma\Delta$. Έχουμε $\frac{\mathrm{K}\Delta}{\mathrm{KB}} = \frac{\mathrm{KE}}{\mathrm{K}\Gamma}$ (3)

β. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι ΕΔ//ΒΓ. Άρα $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EB}} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$ (διότι $\mathrm{EB} = \Gamma\Delta$)

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και Ε το μέσο αυτής. Η ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: $\frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{Z}\Gamma} = \frac{1}{2}$

2. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Αν οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ , ΓΖ τέμνονται στο Ο και είναι ΑΒ//ΔΕ και ΑΓ//ΔΖ , να δείξετε ότι ΒΓ//ΕΖ.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, (ΑΒ//ΓΔ), με $ΑΔ = 6λ$ και $ΒΓ = 4λ$. Πάνω στις ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε $ΑΕ = \frac{3λ}{2}$ και $ΒΖ = λ$. Να δείξετε ότι $ΕΖ // ΑΒ // ΓΔ$

4. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η παράλληλη προς τη ΒΓ από το Α τέμνει τη ΒΔ στο Ε και η παράλληλη προς τη ΔΓ από το Ε τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι ΒΖ//ΑΔ.

5. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Δ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνουν τις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ, να δείξετε ότι ΕΖ//ΒΓ.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ αυτού. Αν ΔΕ//ΑΒ (Ε σημείο της ΑΓ), να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{β} + \frac{1}{γ} = \frac{1}{ΔΕ}$$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 1$) και η διάμεσος ΑΟ αυτού. Αν ΑΔ και ΑΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{ΒΑΜ}$ και $\widehat{ΜΑΓ}$, να δείξετε ότι: $\left(\frac{ΒΔ}{ΔΜ}\right)^2 + \left(\frac{ΓΕ}{ΕΜ}\right)^2 = 4$

Ε "ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"

Τα τρίγωνα ΑΒΡ και ΑΒΣ βρίσκονται σε αντίθετα μέρη της ΑΒ. Τα σημεία Κ, Λ, Μ βρίσκονται πάνω στις ΑΒ, ΑΡ και ΑΣ έτσι ώστε ΚΛ//ΒΡ, ΚΜ//ΒΣ.

Δείξτε ότι: **i.** $\frac{ΑΛ}{ΛΡ} = \frac{ΑΜ}{ΜΣ}$ **ii.** $ΛΜ // ΡΣ$

Μάθημα 12

Ομοιότητα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Όμοια λέγονται δύο πολύγωνα που έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Λόγος ομοιότητας δύο όμοιων πολυγώνων λέγεται ο λόγος δύο πλευρών που είναι απέναντι από αντίστοιχα ίσες γωνίες.

Ισχύουν οι επόμενες προτάσεις:

- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια προς τρίτο τότε είναι και μεταξύ τους όμοια.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι πάντα όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 1$.
- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια τότε όλα τα αντίστοιχα δευτερεύοντα στοιχεία τους έχουν λόγο ίσο με το λόγο ομοιότητας τους.
- Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.
- Δύο τετράγωνα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.

Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

Κριτήριο 1^0: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Κριτήριο 2^0: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών γωνίες τους ίσες.

Κριτήριο 3^0: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Ασκήσεις που ζητείται να υπολογίσουμε κάποιο λόγο τμημάτων.
Ο λόγος αυτός παρουσιάζεται σε αναλογία που προκύπτει από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή ή κάποιου θεωρήματος των διχοτόμων ή ακόμα από την ομοιότητα πολυγώνων (συνήθως τριγώνων) ανάλογα με τα δεδομένα της άσκησης.

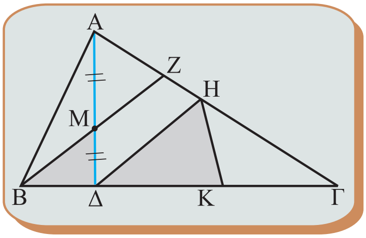
Παράδειγμα 1

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ονομάζουμε Μ το μέσον της διχοτόμου ΑΔ. Φέρνουμε τη ΒΜ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ και τη ΔΗ//ΒΖ. Από το Η φέρνουμε ΗΚ//ΑΔ. Αν $B\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$ να υπολογίσετε τους λόγους: **α.** $\frac{Z\Gamma}{AZ}$ **β.** $\frac{AB}{A\Gamma}$

Λύση

α. Στο τρίγωνο ΑΔΗ είναι ΜΖ//ΔΗ και αφού Μ μέσον της ΑΔ τότε $ΑΖ = ΖΗ \quad (1)$ και

$ΜΖ // = \frac{ΔΗ}{2} \quad (2)$. Αφού ΒΖ//ΔΗ από θεώρημα Θαλή στο ΒΖΓ ισχύει:



$$\frac{ΖΓ}{ΖΗ} = \frac{ΒΓ}{ΒΔ} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{ΖΓ}{ΑΖ} = \frac{ΒΓ}{\frac{ΒΓ}{4}} \Leftrightarrow \frac{ΖΓ}{ΑΖ} = 4$$

β. Αφού ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{Α}$ από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου ισχύει:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{\frac{ΒΓ}{4}}{\frac{3ΒΓ}{4}} = \frac{1}{3}$$

Κατηγορία - Μέθοδος 2

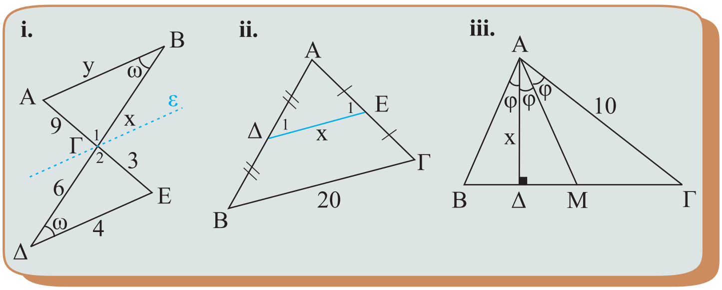
Ασκήσεις που ζητείται να υπολογίσετε ευθύγραμμο τμήμα όταν δίνονται άλλα γνωστά ευθύγραμμα τμήματα.

Το ευθύγραμμο τμήμα υπολογίζεται από αναλογία στην οποία οι υπόλοιποι όροι είναι γνωστοί και η οποία προκύπτει από:

- Εφαρμογή θεωρήματος Θαλή
- Ομοιότητα τριγώνων (γενικότερα πολυγώνων)
- Εφαρμογή των θεωρημάτων των διχοτόμων

Παράδειγμα 2

Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x,y.



Λύση

α. Αφού $\hat{B} = \hat{\Delta}$ είναι ΑΒ//ΔΕ οπότε από θεώρημα Θαλή (θεωρώντας τη νοητή ευθεία ε//ΔΕ//ΑΒ) έχουμε $\frac{6}{3} = \frac{x}{9} \Leftrightarrow x = 18$. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ είναι όμοια διότι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$ άρα και $\hat{A} = \hat{E}$. Επομένως, $\frac{y}{4} = \frac{9}{3} \Leftrightarrow y = 12$.

β. Αφού τα Δ,Ε είναι μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ είναι ΔΕ//ΒΓ. Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ και $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}$. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ είναι όμοια και επομένως:

$$\frac{20}{x} = \frac{AB}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{20}{x} = \frac{AB}{\frac{AB}{2}} \Leftrightarrow \frac{20}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 10$$

γ. Στο τρίγωνο ΑΒΜ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος άρα είναι και διάμεσος, οπότε

$$B\Delta = \Delta M = \frac{BM}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$$

Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο ΑΔΓ έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{M\Gamma}{M\Delta} \Leftrightarrow \frac{10}{x} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{\frac{B\Gamma}{4}} \Leftrightarrow x = 5$$

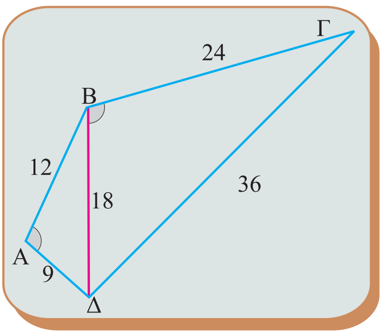
Κατηγορία - Μέθοδος 3

Ασκήσεις όπου είναι γνωστές οι πλευρές τριγώνου και ζητείται ισότητα γωνιών.

Αποδεικνύουμε την ομοιότητα τριγώνων (από αναλογίες πλευρών) και βρίσκουμε τις αντίστοιχες ίσες γωνίες.

Παράδειγμα 3

Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι $\hat{A} = \Delta\hat{B}\Gamma$.



Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΓ είναι όμοια αφού

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}.$$

Άρα οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες άρα $\hat{A} = \Delta\hat{B}\Gamma$.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε αναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1) ή ισότητα γινομένου $\alpha\delta=\beta\gamma$ (2) ή ακόμα σχέση της μορφής $\alpha^2=\beta\gamma$ (3). (όπου α, β, γ μέτρα ευθυγράμμων τμημάτων)

Και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε να δείξουμε ότι ισχύει μια αναλογία. Στις περιπτώσεις (2), (3) αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ αντίστοιχα. Η αναλογία προκύπτει από:

- Εφαρμογή του θεωρήματος Θαλή
- Ομοιότητα τριγώνων (γενικότερα πολυγώνων)
- Εφαρμογή των θεωρημάτων των διχοτόμων (εσωτερικής, εξωτερικής)

Πολλές φορές η ισότητα λόγων προκύπτει μεταβατικά (αν οι λόγοι είναι ίσοι με τρίτο λόγο είναι και μεταξύ τους ίσοι)

Σε πολλές ασκήσεις προκειμένου να φτάσουμε στη ζητούμενη προς απόδειξη αναλογία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των αναλογιών ή ακόμα να προσθέσουμε - αφαιρέσουμε - πολλαπλασιάσουμε - διαιρέσουμε αναλογίες μεταξύ τους.

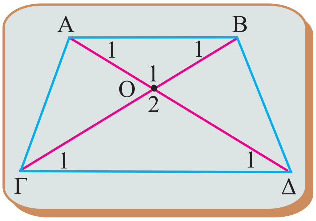
Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο το σημείο τομής των διαγωνίων του διαιρεί κάθε διαγώνιο σε τμήματα ανάλογα με τις βάσεις.

Λύση

Τα τρίγωνα ΒΟΑ και ΓΟΔ είναι όμοια, διότι:

- $\hat{\Gamma}_1=\hat{B}_1$ (ως εντός εναλλάξ)
- $\hat{\Delta}_1=\hat{A}_1$ (ως εντός εναλλάξ) και
- $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

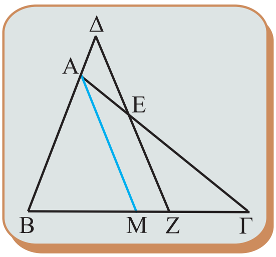


Άρα $\frac{O\Gamma}{OB}=\frac{O\Delta}{OA}$.

Παράδειγμα 5

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσος και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΜ. Να δείξετε ότι $A\Delta\cdot\beta=\gamma\cdot AE$

Λύση



Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{A\Delta}{\gamma}=\frac{AE}{\beta}$. Στο τρίγωνο ΒΔΖ, έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{MZ}{BM} \quad (1)$$

Επίσης στο τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε:

$$\frac{ΑΕ}{ΓΕ}=\frac{ΜΖ}{ΖΓ} \Leftrightarrow \frac{ΑΕ}{ΓΕ+ΕΑ}=\frac{ΜΖ}{ΓΖ+ΖΜ} \Leftrightarrow \frac{ΑΕ}{β}=\frac{ΜΖ}{ΓΜ} \qquad (2)$$

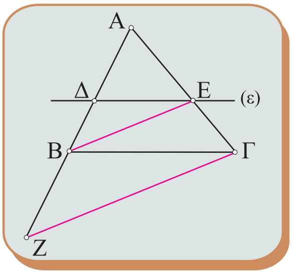
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{ΑΔ}{γ}=\frac{ΑΕ}{β}$, διότι $ΜΒ=ΜΓ$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ευθεία ε είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε. Από το Γ φέρνουμε παράλληλη στη ΒΕ που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ, να δείξετε ότι: $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΒ}{ΑΖ}$

Λύση



Από τις $ΔΕ // ΒΓ \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ (1)

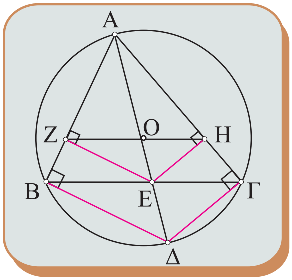
Από τις $ΒΕ // ΓΖ \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{ΑΖ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$

Άσκηση 2

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν η διάμετρος ΑΔ τέμνει τη ΒΓ στο Ε και φέρουμε τις $ΕΖ \perp ΑΒ$ και $ΕΗ \perp ΑΓ$, να δείξετε ότι: $ΖΗ // ΒΓ$

Λύση



Είναι: $\widehat{ΑΒΔ}=\widehat{ΑΖΕ}=1^L$. Άρα $ΕΖ // ΔΒ \Leftrightarrow \frac{ΑΖ}{ΖΒ}=\frac{ΑΕ}{ΕΔ}$ (1)

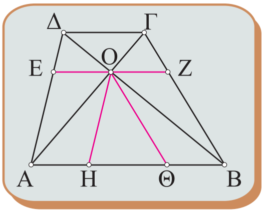
Όμοια: $\widehat{ΑΓΔ}=\widehat{ΑΗΕ}=1^L$. Άρα $ΕΗ // ΔΓ \Leftrightarrow \frac{ΑΗ}{ΗΓ}=\frac{ΑΕ}{ΕΔ}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{ΑΖ}{ΖΒ}=\frac{ΑΗ}{ΗΓ}$, οπότε $ΖΗ // ΒΓ$.

Άσκηση 3

Από το σημείο τομής των διαγωνίων τραπεζίου, φέρνουμε την ΕΖ//ΑΒ (Ε, Ζ σημεία των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα) και ΟΗ//ΑΔ, ΟΘ//ΒΓ (Η, Θ σημεία της ΑΒ).
Να δείξετε ότι: ΟΕ = ΟΖ

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΟΘ//ΒΓ οπότε: $\frac{ΑΟ}{ΟΓ}=\frac{ΑΘ}{ΘΒ}$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι ΟΗ//ΑΔ οπότε: $\frac{ΒΟ}{ΟΔ}=\frac{ΒΗ}{ΑΗ}$ (2)

Επειδή ΔΓ//ΕΖ//ΑΒ θα είναι: $\frac{ΑΟ}{ΟΓ}=\frac{ΒΟ}{ΟΔ}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$\frac{ΑΘ}{ΒΘ}=\frac{ΒΗ}{ΑΗ}$ ή $\frac{ΑΘ+ΘΒ}{ΘΒ}=\frac{ΒΗ+ΑΗ}{ΑΗ}$ ή $\frac{ΑΒ}{ΘΒ}=\frac{ΑΒ}{ΑΗ} \Leftrightarrow ΑΗ=ΘΒ \Leftrightarrow ΕΟ=ΟΖ$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και ονομάζουμε Ε το μέσο της. Αν η ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ να δειχθεί ότι: $\frac{ΑΖ}{ΖΓ}=\frac{1}{2}$

2. Στη πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ και τα σημεία Δ, Ε έτσι ώστε $ΔΜ=ΜΕ$. Φέρνουμε τις ΔΖ//ΑΓ $(Ζ\in ΑΒ)$ και ΕΗ//ΑΒ $(Η\in ΑΓ)$. Να δείξετε ότι: ΖΗ//ΒΓ.

3. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η παράλληλη προς τη ΒΓ από το Α τέμνει την ΒΔ στο Ε και η παράλληλη προς τη ΔΓ από το Ε τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: ΒΖ // ΑΔ

4. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ και $Α'Ζ\perp ΓΓ'$, $Α'Ε\perp ΑΓ$. Να δείξετε ότι: ΒΖ//ΑΔ

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ αυτού. Αν ΔΕ//ΑΒ $(Ε\in ΑΓ)$, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{β}+\frac{1}{γ}=\frac{1}{ΔΕ}$$

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις ΒΕ και ΓΖ κάθετες στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α. Να δείξετε ότι τα Ε και Ζ είναι αρμονικά συζυγή των Α, Δ.

7. Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Μία χορδή ΑΕ τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Να δείξετε ότι: $ΑΒ^2=ΑΔ\cdot ΑΕ$

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A}=1)$ είναι ΑΔ το ύψος και $\Delta E \perp AB$. Να δείξετε ότι: $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$

9. Σε ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα στο Ο. Να δείξετε ότι: $A\Delta^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$

10. Ο κύκλος που γράφεται με διάμετρο τη πλευρά ΒΓ ορθογωνίου τραπεζίου ΑΒΓΔ $(\widehat{A}=\widehat{\Delta}=1)$ τέμνει την ΑΔ στο Ε, να δείξετε ότι: $AE \cdot E\Delta = AB \cdot \Gamma\Delta$

11. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Ε. Να δείξετε ότι: **α.** $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$ **β.** $EB^2 = E\Delta$

12. Από σημείο Ο που βρίσκεται εκτός κύκλου (K, R) φέρνουμε την εφαπτομένη ΟΑ και τη τέμνουσα ΟΒΓ. Να δείξετε ότι: $\dfrac{(AB)^2}{(A\Gamma)^2} = \dfrac{OB}{O\Gamma}$

13. Από την κορυφή παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε την ευθεία ε που τεμνει τη ΒΓ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: $(BE)\cdot(\Delta Z) = (AB)\cdot(A\Delta)$

14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 1^L$. Αν ΑΔ το ύψος του να δείξετε ότι: $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$

15. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ευθεία xy. Η διάμετρος ΑΒ τέμνει κάθετα τη xy στο Γ. Από το Α φέρνουμε τυχαία χορδή ΑΔ, που τέμνει τη xy στο Ε. Να δείξετε ότι: $(A\Delta)\cdot(AE) = (AB)\cdot(A\Gamma)$

16. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ και Ο είναι το σημείο που τέμνονται οι μη παράλληλες πλευρές του. Από το Ο φέρνουμε την ευθεία ε παράλληλη στις βάσεις του τραπεζίου, που τέμνει τις προεκτάσεις των διαγωνίων του τραπεζίου στα Ε και Ζ. Να δείξετε ότι: $EO = OZ$

17. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τυχαία ευθεία ε, που τέμνει την ΑΓ στο Κ, την ΑΒ στο Ρ και την από το Α παράλληλη προς τη ΒΓ στο Ν. Να δειχθεί ότι: $PN/PM = KN/KM$

18. Από το άκρο Α μιας διαμέτρου ΑΒ κύκλου Ο φέρνουμε δύο χορδές ΑΓ και ΑΔ, που τέμνουν την εφαπτομένη ΒΕ στα Ε και Ζ. Να δείξετε ότι: $(AE)\cdot(A\Gamma) = (AZ)\cdot(A\Delta)$

19. Δίνεται κύκλος (Ο, R), χορδή ΑΒ και οι εφαπτομένες ε_1 και ε_2 στα Α και Β. Αν Μ τυχαίο σημείο του ΑΒ και ΜΗ, ΜΕ, ΜΖ οι αποστάσεις του Μ από την $\overset{\frown}{AB}$ και τις ε_1 και ε_2, να δείξετε ότι: $MH^2 = ME \cdot MZ$

20. Από σημείο Σ εκτός κύκλου (Ο, R) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ και μία τέμνουσα ΣΓΔ. Να δείξετε ότι: $ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΔ \cdot ΒΓ$

21. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από το Α μία τέμνουσα τη ΒΓ στο Ζ, τη ΓΔ στο Η και τη ΒΔ στο Ε. Να δείξετε ότι: $(ΕΑ)^2 = (ΕΖ)(ΕΗ)$

22. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι: $ΔΒ \cdot ΔΓ = ΔΕ \cdot ΔΖ$

23. Αν οι διαγώνιες δύο παραλληλογράμμων είναι ανάλογες και σχηματίζουν ίσες γωνίες, τα παραλληλόγραμμα είναι όμοια.

24. Δύο κύκλοι Κ και Λ τέμνονται στα Α και Β. Οι εφαπτομένες των κύκλων στο Α, τους τέμνουν στα Γ και Δ. Να δειχθεί ότι: $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$

25. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρνουμε τη διάμετρο ΑΔ και το ύψος ΑΕ, να δείξετε ότι: $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΑΕ$

26. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΟ το ύψος του. Αν Μ τυχαίο σημείο του ύψους ΑΟ και $ΜΔ \perp ΑΒ$, $ΜΕ \perp ΑΓ$ να δείξετε ότι: $ΑΒ \cdot ΑΔ = ΑΕ \cdot ΑΓ$

27. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις ΑΒ και ΑΓ κατά τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Η ΔΕ τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΕΖ}{ΔΖ}$

Ε “ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ το άθροισμα των βάσεων ΑΒ + ΓΔ είναι ίσα με το άθροισμα ΑΔ + ΒΓ των μη παράλληλων πλευρών του. Από το σημείο τομής των διαγωνίων του φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις που τέμνει την ΑΔ στο Μ και τη ΒΓ στο Ν. Να δειχθεί ότι:

$$ΔΜ + ΓΝ = ΔΓ$$